Aritmética
Aritmética
Intelectum
EVOLUCIÓN

Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica clases de conectores lógicos. Formula proposiciones simples y compuestas.
- Identifica la veracidad de distintas proposiciones lógicas haciendo uso de las tablas de verdad.
- Interpreta los datos disponibles de los esquemas lógicos haciendo uso de los conectores sobre disyunción, conjunción, condicional, bicondicional y disyunción fuerte en la solución de esquemas lógicos.
- Comprueba afirmaciones utilizando propiedades sobre conjuntos.
- Resuelve problemas sobre conjuntos determinándolos por extensión y comprensión y además los representa gráficamente.
- Representa numerales en distintas bases utilizando algoritmos.
- Identifica correctamente las cuatro operaciones básicas en el conjunto de los números enteros positivos.
- Representa matemáticamente enunciados utilizando definiciones de números enteros.

Unidad 2

- Identifica los diferentes criterios de la divisibilidad.
- Demuestra los diferentes criterios de la divisibilidad haciendo uso de las propiedades del principio de multiplicidad.
- Identifica números primos basados en la descomposición canónica relacionados con los divisores simples y compuestos.
- Elabora conceptos y relaciona las propiedades sobre números primos en la construcción de tablas.
- Identifica de manera correcta el algoritmo de Euclides en el cálculo del MCD en los problemas.
- Aplica de manera correcta el algoritmo de Euclides en el cálculo del MCD en la resolución de problemas.
- Evalúa correctamente conceptos y relaciona las propiedades del MCD con el MCM en los ejercicios trabajados en clase.
- Discrimina las distintas propiedades de los números racionales en las fracciones propias e impropias.

DISTRIBUCIÓN EXACTA DE MI BARRIL DE PISCO

El pisco es la bebida nacional del Perú, que por ser propio en aroma y sabor, es una de las bebidas tradicionales de todas las regiones del país.
Se elabora a través de la destilación y fermentación del zumo de la uva blanca peruana. El proceso se inicia con la recolección de dicho fruto para luego ser pisados por un grupo de personas, después, en unos depósitos se realiza todo el proceso bioquímico donde se agregan diversos ingredientes. Luego, durante la fermentación alcohólica es donde se extrae el azúcar natural de la uva; dicho proceso tarda siete días.
La técnica y el arte de la destilación son regulados según la energía del calor, el ritmo, los componentes aromáticos y la vaporización de los todos los elementos. Este método consiste en dejar reposar el líquido por lo menos tres meses antes de ser embotellado.

Si se quiere vaciar 3 barriles de pisco que contienen 210; 300 y 420 litros de capacidad, en envases de un determinado tamaño y cuya capacidad es la mayor posible, ¿cuántos de estos envases son necesarios para que todos queden llenos sin desperdiciar el pisco?

Contenido:

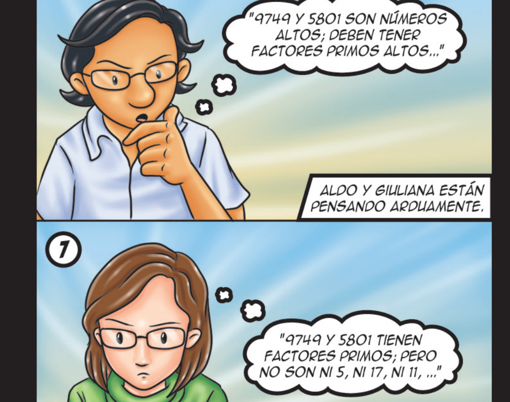
Unidad 3

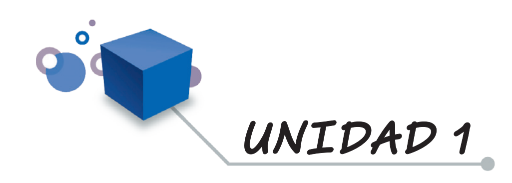
- Emplea el teorema fundamental de la aritmética y aplica los criterios de exclusión de cuadrados y cubos perfectos en la potenciación y radicación.
- Aplica el algoritmo de la potenciación y la radicación elaborando esquemas donde se aplican los criterios sobre la potenciación y radicación.
- Diseña razones y proporciones a partir de ejemplos didácticos.
- Reconoce cómo varían las magnitudes directas e inversas en el sistema de coordenadas.
- Aplica las propiedades sobre la magnitud directa e inversa en el reparto proporcional.
- Crea tablas en la interpretación de las propiedades donde intervienen las magnitudes proporcionales aplicadas en la regla de tres.
- Identifica los elementos para poder aplicar la regla de tres mediante el método de las líneas.

Unidad 4

- Identifica el aumento y descuento sucesivo referente al tanto por ciento en las aplicaciones comerciales.
- Resuelve problemas aplicando las propiedades del tanto por ciento y las relaciona con las aplicaciones comerciales.
- Representa los esquemas estadísticos en diferentes diagramas.
- Expresa la distribución y frecuencias en diferentes esquemas relacionados con la estadística tales como diagramas de barras e histogramas.
- Demuestra el cálculo de la mediana para datos no clasificados en la recta numérica aplicando proporciones.
- Formula los criterios del análisis combinatorio basados en la permutación y combinación.
- Identifica los datos en el análisis combinatorio mediante la permutación y combinación.
- Identifica los diferentes espacios muestrales en el cálculo de las probabilidades.
- Interpreta postulados matemáticos basados en los cálculos probabilísticos.

BATALLA DE GENIOS





LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN LÓGICA

Es un enunciado que tiene la propiedad esencial de ser verdadero o falso, pero no ambos simultáneamente.

Notación

Una proposición se representa simbólicamente con las letras minúsculas tales como: p, q, r, s, t, etc. Cuando se trata de representar varias proposiciones, se utilizan subíndices como p_1; p_2; p_3; ... ; p_m.

Si el valor de verdad de una proposición p es verdadera se le asigna la letra V y si es falsa la letra F.

Ejemplos:

- p: 7 es un número par. (F)
- q: Lima es la capital del Perú. (V)

Clases de proposiciones lógicas

a) **Proposiciones simples o atómicas.** Son aquellas que están constituidas por una sola proposición; carece de conjunciones y del adverbio de negación **no**.

Ejemplos:

- Juan es matemático.
- 13 es un número primo.

b) **Proposiciones compuestas o moleculares.** Son aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones simples, enlazadas entre sí por conjunciones gramaticales o afectadas por el adverbio de negación **no**.

Ejemplos:

- Voy al cine o al teatro.
- Si estudio, entonces ingresaré a San Marcos.

Nota

- A la veracidad o falsedad de una proposición se le denomina valor de verdad.
- A las letras p, q, r, s, t, etc. se les denomina **variables proposicionales**.

Observación

- Los enunciados:
  – Prohibido saltar.
  – ¡Silencio!
  – ¿Cómo te llamas?
  no son proposiciones.
- Las conjunciones son palabras que enlazan proposiciones, sintagmas o palabras. Por ejemplo: y, e, ni, o, etc.

CONECTIVOS LÓGICOS

Llamados también operadores. Son símbolos que reemplazan a las conjunciones gramaticales y al adverbio de negación **no**. Los conectivos lógicos que más usaremos son los siguientes:

En lenguaje común	Símbolo	Nombre de la proposición
No es cierto que...	$\sim$	Negación
... y...	$\wedge$	Conjunción
... o...	$\vee$	Disyunción
Si... entonces...	$\Rightarrow$	Condicional
... si y solo si...	$\Leftrightarrow$	Bicondicional

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

La negación ($\sim$)

Dada una proposición p. Se denomina negación de p a la proposición denotada por $\sim p$ que se lee: "no p" o "no es cierto que p", la cual niega a la proposición inicial, convirtiéndola en falsa cuando es verdadera y viceversa.
Su tabla de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ejemplo:
p: Andrea viajó al Cusco. (V)
$\sim p$: Andrea no viajó al Cusco. (F)

Atención

Una tabla de verdad, es un diagrama que permite expresar todos los posibles valores de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se puedan asignar a sus proposiciones simples.

La conjunción ($\wedge$)

Es una proposición compuesta por las proposiciones p y q, relacionadas mediante el conectivo lógico **y**. Se denota $p \wedge q$ (se lee: "p y q").
Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:
Einstein fue físico y Gauss fue matemático.

Nota

Una proposición conjuntiva será verdadera, si sus proposiciones componentes (p y q) son verdaderas. En otros casos será falsa.

La disyunción (∨)

Es la proposición compuesta por las proposiciones p y q, relacionadas mediante el conectivo lógico **o.** Se denota p ∨ q (se lee: "p o q").

Su tabla de verdad es:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo: Óscar es deportista **o** escritor.

Nota

Una proposición disyuntiva será falsa, si sus proposiciones componentes (p y q) son falsas. En otros casos, será verdadera.

Observación

La proposición condicional es falsa únicamente cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.

La condicional (⇒)

Es aquella proposición en la que dos proposiciones simples p y q se relacionan mediante el conectivo lógico **si... entonces...** Se denota p ⇒ q (se lee: "Si p entonces q").

Su tabla de verdad es:

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Donde:
p: antecedente
q: consecuente

Ejemplo: **si** estudias, **entonces** ingresarás a la universidad.

Recuerda

La proposición bicondicional es verdadera en los casos en que las proposiciones que la conforman tengan el mismo valor de verdad.

La bicondicional (⇔)

Es aquella proposición en la que dos proposiciones simples p y q se relacionan mediante el conectivo lógico **si y solo si**. Se denota p ⇔ q (se lee: "p si y solo si q").

Su tabla de verdad es:

p	q	p ⇔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo: ganaremos el partido **si y solo si** entrenamos todos los días.

Nota

Una proposición disyuntiva exclusiva es verdadera si las proposiciones que la conforman tienen valores de verdad diferentes.

La disyunción exclusiva (△)

Es aquella proposición en la que se relacionan dos proposiciones simples p y q mediante el conectivo lógico **o... o...** Se denota p △ q (se lee: "o p o q").

Su tabla de verdad es:

p	q	p △ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo: **o** voy al cine **o** voy al teatro.

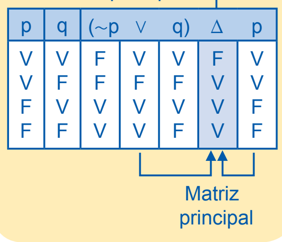
ESQUEMAS MOLECULARES

Un esquema molecular es la combinación de variables proposicionales, conectivos lógicos y signos de grupación.

La evaluación de un esquema molecular, consiste en obtener valores del conectivo principal a partir de los valores de verdad de cada una de las variables proposicionales.

Atención

En un esquema molecular, el **conectivo principal** es el operador de mayor jerarquía que se encuentra libre de signos de colección.
A la columna que contiene los valores de verdad correspondientes a dicho conectivo principal la denominaremos **matriz principal**.



p	q	(~p	∨	q)	△	p
V	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Clasificación de los esquemas moleculares

Según los valores obtenidos en la matriz principal, los esquemas moleculares se clasifican en:

Tautológicos. Cuando los valores de verdad de la matriz principal son todos verdaderos.

Contradictorios. Cuando los valores de verdad de la matriz principal son todos falsos.

Consistentes. Cuando en la matriz principal hay por lo menos una verdad y una falsedad.

Ejemplo:
Evalúa los siguientes esquemas moleculares e indica si es tautológico, contradictorio o consistente.

a) (~p ⇒ q) ∨ ~q

b) (p ⇒ q) △ (q ∨ ~p)

c) (p ∨ q) ⇒ ~p

Resolución:

a)

p	q	(~p	⇒	q)	∨	~q
V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Tautología

∴ El esquema es **tautológico.**

b)

p	q	(p	⇒	q)	Δ	(q	∨	~p)
V	V	V	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V	V

Contradicción

∴ El esquema es **contradictorio.**

c)

p	q	(p	∨	q)	⇒	~p
V	V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V

Consistencia

∴ El esquema es **consistente.**

Nota

Para evaluar una tabla de verdad de 2 variables proposicionales se necesitan 4 valores de verdad, para evaluar una tabla de verdad de 3 variables proposicionales se necesitan 8 valores de verdad.

En general, el número de valores de verdad que se asigna a cada variable resulta de aplicar la fórmula 2^n, donde n es el número de variables proposicionales que hay en el esquema molecular.

Ejemplos:

p
V
F

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

1. Idempotencia
p ∨ p ≡ p
p ∧ p ≡ p

2. Conmutativa
p ∨ q ≡ q ∨ p
p ∧ q ≡ q ∧ p

3. Asociativa
(p ∨ q) ∨ r ≡ p ∨ (q ∨ r)
(p ∧ q) ∧ r ≡ p ∧ (q ∧ r)

4. Distributiva
p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

5. Absorción
p ∨ (p ∧ q) ≡ p
p ∧ (p ∨ q) ≡ p
p ∨ (~p ∧ q) ≡ p ∨ q
p ∧ (~p ∨ q) ≡ p ∧ q

6. De Morgan
~(p ∨ q) ≡ ~p ∧ ~q
~(p ∧ q) ≡ ~p ∨ ~q

7. Del complemento
~(~p) ≡ p
p ∨ ~p ≡ V
p ∧ ~p ≡ F

8. De la identidad
p ∨ V ≡ V
p ∧ V ≡ p
p ∨ F ≡ p
p ∧ F ≡ F

9. De la condicional
p ⇒ q ≡ ~p ∨ q

10. De la bicondicional
p ⇔ q ≡ (p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)

Ejemplo:

Simplifica:
(s ∧ ~t) ⇒ {(~t ⇒ ~s) ∧ ~[(~t ∧ s) ⇒ p]}

Resolución:
Por ley de la condicional:

$\underbrace{\sim(s \wedge \sim t)}_{A} \vee \{\underbrace{(\sim t \Rightarrow \sim s)}_{B} \vee \underbrace{\sim[(\sim t \wedge s) \vee p]}_{C}\}$

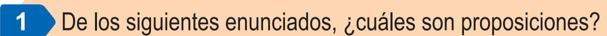
Entonces: A ≡ ~(s ∧ ~t) ≡ ~s ∨ t (De Morgan)
A ≡ s ⇒ t (Ley de la condicional)

También: B ≡ ~t ⇒ ~s ≡ ~(~t) ∨ ~s (Ley de la condicional)
B ≡ t ∨ ~s ≡ ~s ∨ t (Ley de conmutatividad)
B ≡ s ⇒ t (Ley de la condicional)

Además: C ≡ ~[(~t ∧ s) ∨ p]
C ≡ ~(~t ∧ s) ∧ ~p (De Morgan)
C ≡ (t ∨ ~s) ∧ ~p (De Morgan)
C ≡ (s ⇒ t) ∧ ~p (Ley de la condicional)

Luego: s ⇒ t ∨ {(s ⇒ t) ∨ [(s ⇒ t) ∧ ~p]}
≡ (s ⇒ t) ∨ [(s ⇒ t) ∧ ~p]
≡ s ⇒ t (Ley de absorción)

Problemas resueltos



1 De los siguientes enunciados, ¿cuáles son proposiciones?

I. El presidente del Perú.
II. ¿Qué me dijiste?
III. El cuadrado es un polígono de cuatro lados.
IV. ¡Ave Júpiter!
V. Arequipa es la capital del Perú.

Resolución:

Los enunciados III y V son proposiciones ya que se les puede asignar un valor de verdad.

Los enunciados I, II y IV no son proposiciones ya que no se les puede asignar un valor de verdad.

2 Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.

I. $2 + 1 < 2$ ó $2 \times 4 = 2^3$
II. $3^3 = 27$ y $49 - 3 < 47$
III. Si $2^3 > 3^2$; entonces $43^0 = 1$.

Resolución:

Representamos simbólicamente los enunciados y le asignamos el valor de verdad.

I. p: $\underbrace{2 + 1 < 2}_{F}$ q: $\underbrace{2 \times 4 = 2^3}_{V}$

Luego: $p \vee q$
$F \vee V$
V

II. p: $\underbrace{3^3 = 27}_{V}$ q: $\underbrace{49 - 3 < 47}_{V}$

Luego: $p \wedge q$
$V \wedge V$
V

III. p: $\underbrace{2^3 > 3^2}_{F}$ q: $\underbrace{43^0 = 1}_{V}$

Luego: $p \Rightarrow q$
$F \Rightarrow V$
V

3 Sea el esquema molecular tautológico:

$$\sim s \wedge \{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Delta \sim s\}$$

Determina el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s.

Resolución:

Del enunciado, el esquema molecular es tautológico, es decir:

$$\underbrace{\sim s \wedge \{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Delta \sim s\}}_{V}$$

Entonces, se debe cumplir:

$$\underbrace{\sim s}_{V} \wedge \underbrace{\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Delta \sim s\}}_{V}$$

De donde:
s = F (∼s = V)

También:

$$\underbrace{\underbrace{\{[(p \wedge q) \Rightarrow r]}_{F} \Delta \underbrace{\sim s\}}_{V}}_{V}$$

Luego:

$$\underbrace{\underbrace{[(p \wedge q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{r]}_{F}}_{F}$$

De donde: r = F

Además, para que $p \wedge q \equiv V$, se debe cumplir:
p = V; q = V

∴ p = V; q = V; r = F; s = F

4 Sea el esquema molecular:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Delta q$$

Indica si es tautológico, contradictorio o consistente.

Resolución:

Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	[(p	⇒	q)	∧	q]	Δ	q
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	F	F	F

→ Contradictorio

∴ El esquema molecular es contradictorio.

5 Sean las proposiciones:

s: $2 > 4 - 1$
t: $2 = \sqrt{\sqrt{16}}$

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

I. $\sim[\sim(s \wedge t) \vee s]$
II. $(s \Delta t) \Rightarrow \sim s$
III. $(s \Leftrightarrow \sim t) \wedge (t \Delta \sim s)$
IV. $[(t \vee \sim s) \Leftrightarrow \sim t] \Rightarrow s$

Resolución:

Como:
s: $2 > 4 - 1$, es falso, entonces: s = F
t: $2 = \sqrt{\sqrt{16}}$, es verdadero, entonces: t = V

Luego:

I. $\sim[\sim(s \wedge t) \vee s] \equiv \sim[\sim(F \wedge V) \vee F]$
$\equiv \sim[\sim(F) \vee F]$
$\equiv \sim[V \vee F]$
$\equiv \sim[V]$
$\equiv F$

II. $(s \Delta t) \Rightarrow \sim s \equiv \underbrace{(F \Delta V)}_{V} \Rightarrow \sim F$
$V \Rightarrow V$
V

III. $(s \Leftrightarrow \sim t) \wedge (t \Delta \sim s) \equiv (F \Leftrightarrow \sim V) \wedge (V \Delta \sim F)$
$(F \Leftrightarrow F) \wedge (V \Delta V)$
$V \wedge F$
F

IV. $[(t \vee \sim s) \Leftrightarrow \sim t] \Rightarrow s \equiv [(V \vee \sim F) \Leftrightarrow \sim V] \Rightarrow F$
$[(V \vee V) \Leftrightarrow F] \Rightarrow F$
$[V \Leftrightarrow F] \Rightarrow F$
$F \Rightarrow F$
V

6 Si $p \,\Delta \sim q \equiv V$ y $\sim p \Rightarrow r \equiv F$, halla el valor de verdad de:

$$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \,\Delta\, r)] \Leftrightarrow \sim q$$

Resolución:

De los esquemas moleculares, determinamos el valor de verdad de p, q y r.

$p \,\Delta \sim q \equiv V$ (p: F, ~q: V) $\sim p \Rightarrow r \equiv F$ (~p: V, r: F)

Entonces: p = F; q = F; r = F

Reemplazamos cada valor en el esquema dado:

$[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \,\Delta\, r)] \Leftrightarrow \sim q$
$[(\sim F \Rightarrow F) \wedge (F \,\Delta\, F)] \Leftrightarrow \sim F$
$[(V \Rightarrow F) \wedge (F \,\Delta\, F)] \Leftrightarrow V$
$[F \wedge F] \Leftrightarrow V$
$F \Leftrightarrow V$
F

7 Se define el conectivo lógico ω mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	p ω q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Evalúa el siguiente esquema molecular y da como respuesta los valores de verdad de la matriz principal:

$$[(\sim p \,\omega\, q) \Rightarrow p] \,\omega \sim q$$

Resolución:

Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	[(~p	ω	q)	⇒	p]	ω	~q
V	V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V

Matriz principal

8 Simplifica:

$$\{[(\sim p \wedge r) \Rightarrow r] \wedge \sim q\} \Rightarrow p$$

Resolución:

Simplificaciones:

$\{[(\sim p \wedge r) \Rightarrow r] \wedge \sim q\} \Rightarrow p$
$\equiv \{[\sim(\sim p \wedge r) \vee r] \wedge \sim q\} \Rightarrow p$
$\equiv \{[p \vee \sim r \vee r] \wedge \sim q\} \Rightarrow p$
$\equiv \{[p \vee \underbrace{(\sim r \vee r)}] \wedge \sim q\} \Rightarrow p$
$\equiv \{\underbrace{[p \vee V]} \wedge \sim q\} \Rightarrow p$
$\underbrace{\{V \wedge \sim q\}} \Rightarrow p$
$\{\sim q\} \Rightarrow p \equiv \sim\{\sim q\} \vee p \equiv q \vee p$

9 Si la proposición $(p \,\Delta\, r) \vee q$ es falsa, entonces podemos afirmar que:

I. q es necesariamente falsa.
II. Si r es verdadera, entonces necesariamente p debe ser falsa.
III. Si p es verdadera, entonces r puede ser verdadera o falsa.

Resolución:

Del enunciado:

$\underbrace{(p \,\Delta\, r) \vee q}_{F}$

Entonces:

$\underbrace{(p \,\Delta\, r)}_{F} \vee \underset{F}{q}$

Luego:

p Δ r
V V
F F
F

Por lo tanto:

I. Verdadero
q debe ser necesariamente falsa.

II. Falso
Si r = V, entonces p = V.

III. Falso
Si p = V, entonces no puede ser falsa, ya que:
V Δ F
V

10 Si: $p \uparrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

El siguiente esquema molecular:

$\sim\{\sim(p \Rightarrow q) \vee [\sim q \wedge (p \wedge r)]\}$, se reduce a:

Resolución:

Por dato: $p \uparrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

Luego, simplificamos el esquema molecular:

$\sim\{\sim(p \Rightarrow q) \vee [\sim q \wedge (p \wedge r)]\}$
$\equiv \sim\{\sim(\sim p \vee q) \vee [(\sim q \wedge p) \wedge r]\}$
$\equiv \sim\{(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim q) \wedge r]\}$
$\equiv \sim(p \wedge \sim q)$
$\equiv \sim p \vee q \equiv p \uparrow q$

TEORÍA DE CONJUNTOS

NOCIÓN DE CONJUNTO

Ente matemático por el que se puede tener una idea subjetiva de ello como colección, agrupación o reunión de objetos bien definidos llamados elementos, los cuales pueden ser abstractos o concretos.

Ejemplos:

- Los países de América del Sur.
- Los días de la semana.
- Jugadores de un equipo de fútbol.

Nota

La representación gráfica de un conjunto, consiste en representar los elementos de este, dentro de una figura cerrada (diagrama de Venn–Euler).

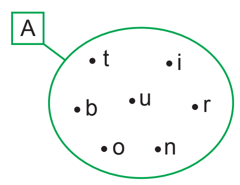
Notación

Para representar a los conjuntos se utilizan las letras mayúsculas A, B, C, ..., y para denotar a sus elementos se usan las letras minúsculas separadas por punto y coma.

Ejemplo:

A = {t; i; b; u; r; o; n}

Gráficamente:



RELACIÓN DE PERTENENCIA

Esta relación se establece solo de elemento a conjunto y nos indica si el elemento forma parte del conjunto considerado.

Notación:

$\in$ se lee: "... pertenece al conjunto..."

$\notin$ se lee: "... no pertenece al conjunto..."

Ejemplo:

Sea el conjunto: M = {1; 2; p; q}

- $1 \in M$
- $3 \notin M$
- $p \in M$
- $4 \notin M$
- $q \in M$
- $6 \notin M$
- $2 \in M$
- $8 \notin M$

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por extensión	Por comprensión
Es cuando se nombra explícitamente a cada uno de los elementos que conforman el conjunto. Ejemplo: R = {a; e; i; o; u}	Es cuando se indica una propiedad común que caracteriza a todos sus elementos. Ejemplo: R = {x / x es una vocal}

Observación

En general, los conjuntos determinados por comprensión tienen la siguiente estructura:

C = { ☐ / ☐ }

Tal que

Características comunes de los elementos

Forma general del elemento

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Es la cantidad de elementos diferentes de un conjunto. Se denota por n(A) y se lee: cardinal de A.

Ejemplo:

G = {x / x es una vocal de la palabra ingeniero}

G = {e; i; o}

n(G) = 3

CLASES DE CONJUNTOS

Conjunto finito

Es aquel conjunto que tiene una cantidad limitada de elementos.

Ejemplo: V = {x / x es una letra de abecedario}

Conjunto infinito

Es aquel que tiene una cantidad ilimitada de elementos y cuyo último término no se puede señalar.

Ejemplo: P = {x / x es un número natural}

Conjunto vacío o nulo

Es aquel conjunto que carece de elementos.

Notación: $\varnothing$, { }

Ejemplo: $N = \{x / 0 \leq x < 7 \wedge x^2 = 81\} = \{\ \} = \varnothing$

Conjunto unitario o singular

Es aquel conjunto que posee un solo elemento.

Ejemplo:

$S = \{x / x > 0 \wedge x^2 = 9\} = \{3\}$

Conjunto universal

Es aquel conjunto de referencia que se toma de manera conveniente para el estudio de una situación particular, de modo que contenga a todos los elementos considerados en dicha situación.

Ejemplo:
$A = \{2; 6; 10; 12\}$
Un conjunto universal para A será:
$U = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 13\}$

Conjunto de conjuntos

Es aquel cuyos elementos son todos conjuntos.

Ejemplo:
$C = \{\{2; 3\}; \{3\}; \{2\}; \{1\}\}$

Conjunto potencia

El conjunto potencia de A, es aquel que está formado por todos los subconjuntos posibles que posee el conjunto A.

Notación: P(A)
Se lee: conjunto potencia de A.

Ejemplo:
Sea el conjunto: $A = \{5; 7\}$, entonces:
$P(A) = \{\varnothing; \{5\}; \{7\}; \{5; 7\}\}$

El número de elementos de P(A) se calcula así:

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

En el ejemplo: $n[P(A)] = 2^2 = 4$

Nota

En el ejemplo, los subconjuntos $\varnothing$; {5}; {7} son denominados: subconjuntos propios.
En general, para todo conjunto A, se cumple:

$$\text{n.° de subconjuntos propios} = 2^{n(A)} - 1$$

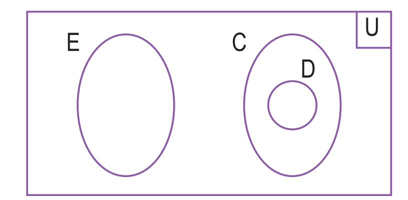
RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión

Se dice que el conjunto A está incluido en el conjunto B (A es un subconjunto de B) si todos los elementos de A están en B. Se denota: $A \subset B$ y se lee: "A está incluido en B".

Ejemplo:
Sean los conjuntos:
U = {x / x es un mamífero}, D = {x / x es un tigre}, C = {x / x es un felino}, E = {x / x es un conejo}

Gráficamente:



Observamos:
- $D \subset C$
- $C \subset U$
- $D \not\subset E$
- $E \not\subset C$
- $E \subset U$
- $D \subset U$

Observación

Gráficamente, la inclusión se representa:
$A \subset B$
B
A

Igualdad

Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos, es decir:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Ejemplo:
Sean los conjuntos:
A = {x / x es una vocal} y B = {a; e; i; o; u}
Se observa que A y B tienen los mismos elementos.
$\therefore$ A = B

Atención

Al conjunto de conjuntos también se le denomina familia de conjuntos.

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables cuando solamente uno de ellos está incluido en el otro, es decir:

$$A \text{ es comparable con } B \Leftrightarrow A \subset B \vee B \subset A$$

Ejemplo:
Sean los conjuntos: $A = \{a; b; c; d; e\}$ y $B = \{c; d\}$
Se cumple que $B \subset A$ pero $A \not\subset B$
$\therefore$ A y B son dos conjuntos comparables.

Disjuntos

Dos conjuntos A y B, son disjuntos cuando no tienen elementos comunes.

Ejemplo:
$A = \{2; 4; 6\}$
$B = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 6 < x < 10\}$
$\therefore$ A y B son disjuntos.

Recuerda

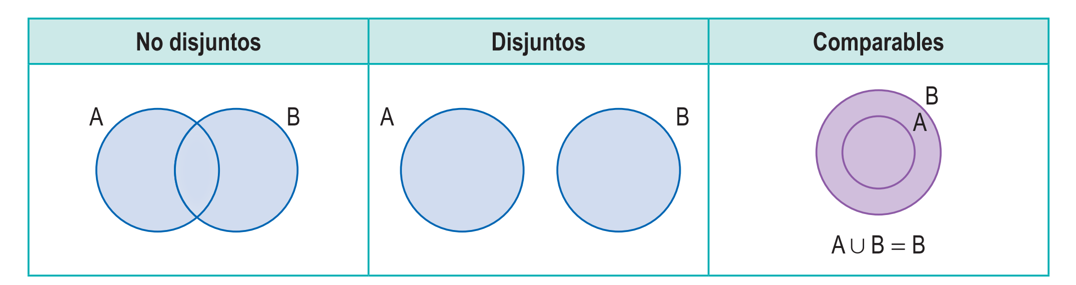
El vacío $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión (∪)

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Representación gráfica (casos posibles)



No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B	B A $A \cup B = B$

Atención

Ejemplo:
Sean los conjuntos:
$A = \{3; 5; p; q\}$
$B = \{4; 5; 6; q\}$

Entonces:
$A \cup B = \{3; 4; 5; 6; p; q\}$

Intersección (∩)

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Representación gráfica (casos posibles)

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B $A \cap B = \varnothing$	B A $A \cap B = A$

Observación

Para el ejemplo anterior:

- $A \cap B = \{5; q\}$
- $B - A = \{4; 6\}$
- $A \triangle B = \{3; p; 4; 6\}$

Diferencia (–)

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Representación gráfica (casos posibles)

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B $A - B = A$	B A $A - B = \varnothing$

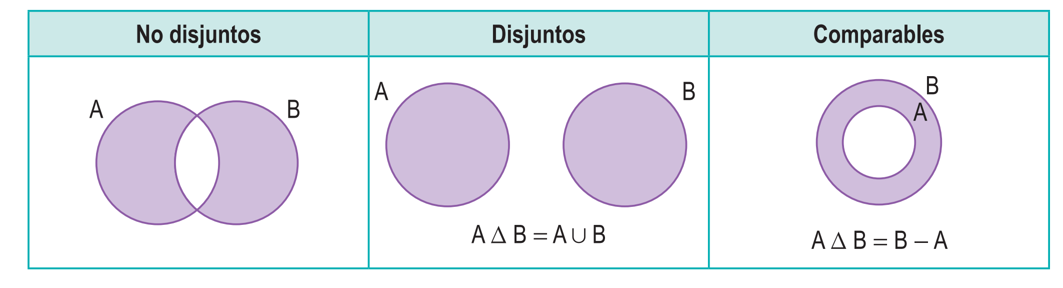
Recuerda

Para los conjuntos A y B se cumple:
$A \cap B = \phi \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos

Diferencia simétrica (∆)

$$A \triangle B = \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

Representación gráfica (casos posibles)



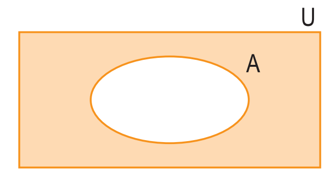
No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B $A \triangle B = A \cup B$	B A $A \triangle B = B - A$

Observación

Para dos conjuntos A y B se cumple:
$A - B = A \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos

Complemento (A^C o A')

$A^C = A' = \{x / x \notin A\}$



> **Atención**
> - El complemento de un conjunto A, también se denota: $\overline{A}$; C(A)
> - $U' = \varnothing$
> $\varnothing' = U$

Producto cartesiano

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se define el producto cartesiano como el conjunto:

$A \times B = \{(x; y) / x \in A \wedge y \in B\}$

Ejemplo:
Sean los conjuntos: A = {1; 2; 3} y B = {6; 8}
$\therefore$ A × B = {(1; 6); (1; 8); (2; 6); (2; 8); (3; 6); (3; 8)}

Diagrama sagital

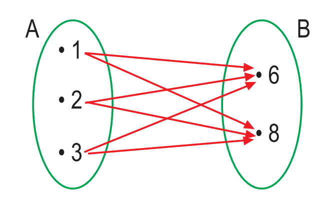
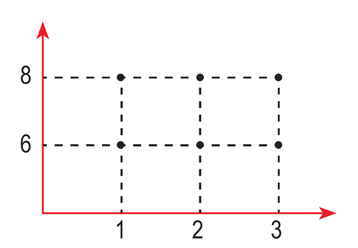


Diagrama cartesiano



> **Observación**
> Para dos conjuntos A y B se cumple:
> - $n(A \times B) = n(B \times A)$
> - $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
> - $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Idempotencia
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

Conmutativa
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

Asociativa
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributiva
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgan
$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

De absorción
$A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

Del complemento
$A \cup A' = U$
$A \cap A' = \varnothing$
$(A')' = A$

De la unidad
$A \cup U = U$
$A \cap U = A$
$A \cup \varnothing = A$
$A \cap \varnothing = \varnothing$

> **Algunas propiedades adicionales**
> $A - B = A \cap B'$
> $A' - B' = B - A$
> $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$
> $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$
> $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
> $n[P(A) \cap P(B)] = n[P(A \cap B)]$

Ejemplo:
Si $A \subset B$, simplifica: $\{[(A - D) - B^C] \cup (B - C) \cup (B^C \cup C)^C\} \cap A$

Resolución:
$\{[(A - D) - B^C] \cup (B - C) \cup (B^C \cup C^C)^C\} \cap A$
$= \{[(A - D) \cap (B^C)^C] \cup (B \cap C^C) \cup (B \cap C)\} \cap A$ (Ley de diferencia y De Morgan)
$= \{[(A - D) \cap B] \cup [(B \cap C^C) \cup (B \cap C)]\} \cap A$ (Ley del complemento y asociatividad)
$= \{[(A - D) \cap B] \cup [B \cap (C^C \cup C)]\} \cap A$ (Ley de distributividad)
$= \{[(A - D) \cap B] \cup [B \cap U]\} \cap A$ (Ley del complemento)
$= \{[(A - D) \cap B] \cup B\} \cap A$ (Ley de la unidad)
$= B \cap A$ (Ley de absorción)
$= A$ $(A \subset B)$

Problemas resueltos

1 Sea el conjunto:

$$B = \{0; \{0\}; \{0; 1\}\}$$

Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- $0 \in B$
- $\{0; 1\} \subset B$
- $1 \in B$
- $\{1\} \in B$
- $\{0\} \subset B$
- $\{0; \{0; 1\}\} \subset B$

Resolución:

- $0 \in B$ (verdadero)
  0 es un elemento del conjunto B.
- $\{0; 1\} \subset B$ (falso)
  $\{0; 1\}$ es un elemento del conjunto B y no un subconjunto de B.
- $1 \in B$ (falso)
  1 no es un elemento del conjunto B.
- $\{1\} \in B$ (falso)
  $\{1\}$ no es un elemento del conjunto B.
- $\{0\} \subset B$ (verdadero)
  0 es un elemento del conjunto B, entonces $\{0\}$ es un subconjunto de B.
- $\{0; \{0; 1\}\} \subset B$ (verdadero)
  $\{0; \{0; 1\}\}$ es un subconjunto del conjunto B.

2 Calcula el número de elementos del conjunto C.

$$C = \left\{\frac{2x+1}{3} \in \mathbb{Z} \,/\, -1 \le x \le 8\right\}$$

Resolución:

Tenemos: $-1 \le x \le 8$

$-2 \le 2x \le 16$

$-1 \le 2x + 1 \le 17$

$-0{,}33 \le \frac{2x+1}{3} \le 5{,}67$

Entonces: $\frac{2x+1}{3} \in [-0{,}33; 5{,}67]$

Luego: $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ $\therefore$ $n(C) = 6$

3 Si los conjuntos:

$K = \{a; x + y\}$

$L = \{a + 1; x - y\}$

son iguales, halla el valor de $(x - a)^{2y}$.

Resolución:

Sabemos que para cualquier valor de **a** se cumple: $a \neq a + 1$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a + 1 \\ x - y = a \end{array}\right\} (-)$$

$2y = 1$

$y = \frac{1}{2}$

Además:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = a + 1 \\ x - y = a \end{array}\right\} (+)$$

$2x = 2a + 1$

$2x - 2a = 1$

$x - a = 1/2$

Luego, nos piden:

$$(x - a)^{2y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

4 Si el conjunto W es unitario, halla $x + yz$.

$$W = \{x - y; y + z; x - z; 12\}$$

Resolución:

Por dato, el conjunto W es unitario, entonces se cumple:

- $x - y = x - z$
  $y = z$
- $y + z = 12$
  $y + y = 12$
  $2y = 12$
  $y = 6 \Rightarrow z = 6$

Además:

$x - y = 12$

$x - 6 = 12$

$x = 18$

Nos piden: $x + y \times z = 18 + 6 \times 6 = 54$

5 ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto E?

$E = \{x \,/\, x \in \mathbb{N} \wedge 13 < 3x + 2 < 27\}$

Resolución:

Tenemos:

$13 < 3x + 2 < 27$

$11 < 3x < 25$

$3{,}67 < x < 8{,}33$

$\Rightarrow$ x: 4; 5; 6, 7; 8

Luego: $E = \{4; 5; 6; 7; 8\}$

Nos piden: $n[P(E)] - 1 = 2^{n(E)} - 1 = 2^5 - 1 = 31$

6 Si:

$A = \{x \,/\, x \in \mathbb{Z} \wedge 5 < 2x + 1 < 17\}$

$B = \left\{x = \frac{20}{n} \,/\, n \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{Z}\right\}$

Halla el número de elementos de $A \times B$.

Resolución:

Determinamos por extensión cada conjunto:

Para A:

$5 < 2x + 1 < 17$

$4 < 2x < 16$

$2 < x < 8$

x: 3; 4; 5; 6; 7 $\Rightarrow$ $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$; $n(A) = 5$

Para B:

Se sabe que $n \in \mathbb{N}$; entonces para que $x \in \mathbb{Z}$, n debe tomar los siguientes valores:

$n = 1 \Rightarrow x = 20$

$n = 2 \Rightarrow x = 10$

$n = 4 \Rightarrow x = 5$

$n = 5 \Rightarrow x = 4$

$n = 10 \Rightarrow x = 2$

$n = 20 \Rightarrow x = 1$

Luego: $B = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\} \Rightarrow n(B) = 6$

Nos piden:
$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 5 \times 6 = 30$

7 Sean los conjuntos $A = \{p\}$; $B = \{q\}$, donde $p > q$ y $\{p; q\} \subset \mathbb{Z}^+$. De las afirmaciones, ¿cuáles son verdaderas?
I. $P(A - B) = P(A)$
II. $(A \cup B) - A = B - A$
III. $n[P(A \cup B)] = n[P(A \cap B)]$
IV. $B \cap (A \cup \varnothing) = \varnothing$

Resolución:

Como $\{p; q\} \subset \mathbb{Z}+$ y $p > q$ entonces $p \neq q$, luego:
$A \cap B = \varnothing$ (son disjuntos)

I. $P(A - B) = P(A)$ (verdadero)
$A - B = A \Rightarrow P(A - B) = P(A)$

II. $(A \cup B) - A = B - A$ (verdadero)
$(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A' = A' \cap (A \cup B)$
$= A' \cap (A \cup B)$
$= A' \cap B$
$= B \cap A'$
$= B - A$

III. $n[P(A \cup B)] = n[P(A \cap B)]$ (falso)
Como $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$ de cumple:
$A \cup B \neq \varnothing \wedge A \cap B = \varnothing$ (disjuntos)
$\Rightarrow n(A \cup B) \neq n(A \cap B)$
Luego: $n[P(A \cup B)] \neq n[P(A \cap B)]$

IV. $B \cap (A \cup \varnothing) = \varnothing$ (verdadero)
Se cumple:
$B \cap (A \cup \varnothing) = (B \cap A) \cup (B \cap \varnothing)$
$= (B \cap A) \cup \varnothing$
$= B \cap A$
$= \varnothing$

8 Si $A \subset B$ y $A \cap D = \varnothing$, halla $(A \cap D') \cap B$.

Resolución:

Se cumple:
$A \cap D = \varnothing \Leftrightarrow A - D = A$
$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

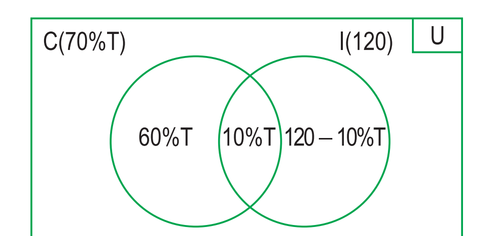
Luego: $A \cap D' = A - D = A$

Nos piden:
$\underbrace{(A \cap D')} \cap B$
$\underbrace{(A - D)} \cap B$
$A \quad \cap B = A$

9 En una reunión, el 70% de las personas hablan castellano, 120 inglés y el 10% de las personas hablan inglés y castellano. ¿Cuántas personas hablan solamente castellano?

Resolución:

Sea T el total de personas en la reunión.
Gráficamente:



Se cumple:
$n(C \cup I) = n(C) + n(I) - n(C \cap I)$

Reemplazando:
$T = 60\%T + 10\%T + 120 - 10\%T$
$T = 60\%T + 120$
$40\%T = 120$
$\frac{40}{100}T = 120$
$\Rightarrow T = 300$

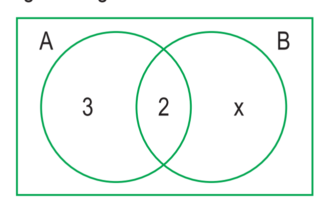
Nos piden el número de personas que solamente hablan castellano:
$n(C - I) = 60\%T = \frac{60}{100}(300) = 180$

10 Si:
$n[P(A \cap B)] = 4$
$n[P(A - B)] = 8$
$n[P(A \triangle B)] = 128$
Calcula el número de elementos del conjunto B.

Resolución:

Por dato:
$n[P(A \cap B)] = 4 \Rightarrow 2^{n(A \cap B)} = 2^2 \Rightarrow n(A \cap B) = 2$
$n[P(A - B)] = 8 \Rightarrow 2^{n(A - B)} = 2^3 \Rightarrow n(A - B) = 3$
$n[P(A \triangle B)] = 128 \Rightarrow 2^{n(A \triangle B)} = 2^7 \Rightarrow n(A \cup B) - n(A \cap B) = 7$ ...(1)

Observamos el siguiente gráfico:



De (1) tenemos:
$3 + 2 + x - 2 = 7$
$3 + x = 7$
$x = 4$

Luego, el número de elementos de B es:
$2 + x = 2 + 4 = 6$

> **Observación**
> Las cifras que emplearemos para la formación de numerales son:
> 0; 1; 2; 3; ...

DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la formación, lectura y escritura correcta de los números.

CONCEPTOS PREVIOS

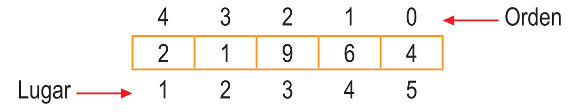
Número. Es un ente matemático que indica cantidad y nos permite cuantificar los elementos de la naturaleza.
Numeral. Es la representación simbólica o figurativa del número.
Cifra o dígito. Son los símbolos que convencionalmente se utilizan en la formación de los numerales.

SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es el conjunto de reglas y principios que rigen la formación de la escritura y lectura de los números, mediante la adecuada combinación de un grupo reducido de símbolos y palabras.

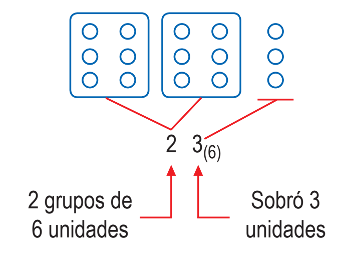
Principios

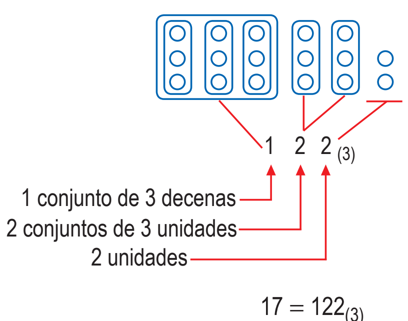
1. Toda cifra que forma parte de un numeral tiene asociado un **orden** y un **lugar**.
   - **Orden.** Se cuenta de derecha a izquierda a partir de cero.
   - **Lugar.** Se cuenta de izquierda a derecha a partir de uno.



2. Todo sistema de numeración tiene una **base** que es un número natural mayor que la unidad, el cual nos indica la cantidad de unidades necesarias y suficientes de un orden cualquiera para formar una unidad del orden inmediato superior.

   Ejemplos:
   - 15 unidades en base 6:
   - 17 unidades en base 3:





$15 = 23_{(6)}$ $17 = 122_{(3)}$

3. Toda cifra que conforma un numeral, es menor que la base.

> **Ten en cuenta...**
> - El sistema de numeración de base n puede utilizar n cifras diferentes.
> - En un sistema de numeración de base n, la cifra máxima será (n – 1).

Algunos sistemas de numeración

Base	Nombre	Cifras que utiliza
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10)
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10); (11)
⋮	⋮	⋮
n	Enesimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...; (n – 2); (n – 1)

Consideraciones

a) En una igualdad de numerales: "A mayor numeral menor base y viceversa".

Ejemplo:

- $\overset{+}{\underset{-}{4236_{(7)}}} = \overset{-}{\underset{+}{1141_{(11)}}}$
- $\overset{+}{\underset{-}{1342_{(5)}}} = \overset{-}{\underset{+}{266_{(9)}}}$
- $\overset{-}{\underset{+}{28_{(9)}}} = \overset{+}{\underset{-}{122_{(4)}}}$

b) Las cifras permitidas en la base n son: 0; 1; 2; ...; (n – 1)

c) El número de cifras que se puede utilizar para la formación de numerales en cierta base, es igual a la base.

4. Toda **cifra** que forma parte de un numeral tiene dos valores:
   - **Valor relativo (V. R.).** Es el valor que toma la cifra teniendo en cuenta la base y su respectivo orden.
   - **Valor absoluto (V. A.).** Es el valor que tiene la cifra por su representación.

   Ejemplo:
   Sea el numeral $5347_{(8)}$; entonces:

   V. A. (7) = 7   V. R. (7) = 7×8^0
   V. A. (4) = 4   V. R. (4) = 4×8^1
   V. A. (3) = 3   V. R. (3) = 3×8^2
   V. A. (5) = 5   V. R. (5) = 5×8^3

Observación

Solo para la última cifra de un numeral, su valor relativo coincidirá con su valor absoluto.

Del ejemplo:

V. A. (7) = V. R. (7) = 7

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

Cada cifra de un número puede ser representada por una letra del abecedario; todas ellas cubiertas por una barra horizontal, para distinguirlas de las expresiones algebraicas.

$\overline{ab}_{(n)}$: representa cualquier número de dos cifras en base n.

$\overline{abc}$: representa cualquier número de tres cifras en base diez; es decir:

100; 101; 102; 103; ...; 998; 999

$\overline{ab37}$: representa cualquier número de cuatro cifras en base diez que termina en 37; es decir:

1037; 1137; 1237; ...; 9837; 9937

$\overline{ab4}_{(6)}$: representa cualquier número de tres cifras en base seis que termina en 4; es decir:

$104_{(6)}$; $114_{(6)}$; $124_{(6)}$; $134_{(6)}$; ...; $554_{(6)}$

Nota

Numeral capicúa. Es aquel numeral cuyas cifras equidistantes son iguales.

Ejemplos:
$\overline{aba}$; $\overline{mnnm}_{(k)}$; $123321_{(4)}$; $\overline{xx}_{(8)}$

Debemos considerar que:

- Toda expresión que esté entre paréntesis representará una cifra.

  Ejemplos:
  - $\overline{a(2b)b}_{(5)}$
  - $\overline{27\left(\frac{a}{3}\right)a}_{(8)}$
  - $\overline{a6b(a+b+1)}_{(7)}$

- La cifra de mayor orden de un numeral debe ser distinta de cero.

  Ejemplo:
  Numeral de dos cifras en base 3:
  $\overline{ab}_{(3)}$: $10_{(3)}$; $11_{(3)}$; $12_{(3)}$; $20_{(3)}$; $21_{(3)}$; $22_{(3)}$

- Letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes.

  Ejemplo:
  Numeral de dos cifras en base 2:
  $\overline{ab}_{(2)}$: $10_{(2)}$; $11_{(2)}$

Recuerda

La descomposición polinómica también se puede realizar por bloques.

Ejemplos:

$\overline{mnmn}_{(p)} = \overline{mn}_{(p)} \times p^2 + \overline{mn}_{(p)}$

$\overline{aabb}_{(c)} = \overline{aa}_{(c)} \times c^2 + \overline{bb}_{(c)}$

$554466_{(k)} = 55_{(k)}k^4 + 44_{(k)}k^2 + 66_{(k)}$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE UN NUMERAL

Consiste en expresar un numeral como la suma de los valores relativos de todas sus cifras.

Ejemplos:

- $4153266_{(7)}$ = V. R. (4) + V. R. (1) + V. R. (5) + V. R. (3) + V. R. (2) + V. R. (6) + V. R. (6)
  $4153266_{(7)} = 4 \times 7^6 + 1 \times 7^5 + 5 \times 7^4 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 6 \times 7^0$
- $\overline{abcd}_{(n)}$ = V. R. (a) + V. R. (b) + V. R. (c) + V. R. (d)
  $\overline{abcd}_{(n)} = a \times n^3 + b \times n^2 + c \times n + d$

CONVERSIÓN DE UN NÚMERO DE UNA BASE A OTRA

Se presentan los siguientes casos:

Caso I: de base n a base 10

En este caso se calcula el número de unidades simples que posee dicho número, para esto es suficiente aplicar la descomposición polinómica del número y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo:
Convierte a base 10, los siguientes numerales:

• $324_{(7)}$ • $231_{(4)}$

Resolución:

- $324_{(7)} = 3 \times 7^2 + 2 \times 7 + 4 = 165 \Rightarrow 324_{(7)} = 165$
- $231_{(4)} = 2 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 45 \Rightarrow 231_{(4)} = 45$

Caso II: de base 10 a base n

Se efectúa empleando el método de divisiones sucesivas, para lo cual se divide el número dado entre n (base del sistema al cual se desea pasar). Si el cociente es igual o mayor que n, se divide este nuevamente entre n y así sucesivamente hasta obtener un cociente menor que n. El nuevo número estará formado por el último cociente y todos los residuos obtenidos de derecha a izquierda.

Ejemplo:
Convierte 328 a base 6.

Resolución:

```
328 |6
324  54 |6
(4)  54  9 |6
    (0)  6 (1)
        (3)
```

Entonces:
$328 = 1304_{(6)}$

Caso III: de base n a base m (n y m $\neq$ 10)

En este caso, primero se convierte el número de base n a base 10 y el resultado se convierte a base m.

Ejemplo:
Convierte $413_{(8)}$ a base 5.

Resolución:

1. Convertimos $413_{(8)}$ a base 10:
   $413_{(8)} = 4 \times 8^2 + 1 \times 8 + 3 = 267 \Rightarrow 413_{(8)} = 267$
2. Convertimos 267 a base 5:

```
267 |5
265  53 |5
(2)  50  10 |5
    (3)  10 (2)
        (0)
```

Luego: $413_{(8)} = 2032_{(5)}$

Atención

Método Ruffini para expresar un numeral de base n $\neq$ 10 a base 10

De los ejemplos:

```
     |  3    2    4
  7  |  ↓   21  161
     |  3   23  [165]
```

$\therefore 324_{(7)} = 165$

```
     |  2    3    1
  4  |  ↓    8   44
     |  2   11  [45]
```

$\therefore 231_{(4)} = 45$

Nota

Caso particular:

$\underbrace{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots \overline{1a}_{(n)}}}}}_{m \text{ veces}} = n + ma$

PROPIEDADES

Numeral con cifras máximas

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\,...\,(n-1)}}_{k \text{ cifras}}{}_{(n)} = n^k - 1$$

Bases sucesivas

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots \overline{1m}_{(n)}}}} = n + a + b + c + ... + m$$

Intervalo para un numeral $N_{(n)}$ con cierta cantidad de cifras

$$n^{k-1} \leq N_{(n)} < n^k$$

Donde k es el número de cifras de $N_{(n)}$.

Problemas resueltos

1 Halla $\dfrac{x^2 - 1}{2}$ si:

$\overline{12x7}_{(8)} = 575_{(11)}$

Resolución:

Expresamos ambos términos en base 10.

$\overline{12x7}_{(8)} = 575_{(11)}$

$1 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + x \times 8 + 7 = 5 \times 11^2 + 7 \times 11 + 5$

$512 + 128 + 8x + 7 = 687$

$647 + 8x = 687$

$8x = 40$

$\Rightarrow x = 5$

Piden: $\dfrac{x^2 - 1}{2} = \dfrac{5^2 - 1}{2} = 12$

2 Halla m, si: $102_{(11)} = \overline{2m4}_{(7)}$

Resolución:

$102_{(11)} = \overline{2m4}_{(7)}$

A base 10:

$1 \times 11^2 + 0 \times 11 + 2 = 2 \times 7^2 + m \times 7 + 4$

$121 + 2 = 98 + 7m + 4$

$123 = 7m + 102$

$7m = 123 - 102$

$7m = 21$

$\therefore\ m = 3$

3 Halla $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, si se cumple:

$245_{(6)} = \overline{abcd}_{(4)}$

Resolución:

Expresamos $245_{(6)}$ en base 10:

$245_{(6)} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5$

$245_{(6)} = 72 + 24 + 5$

$245_{(6)} = 101$

Luego, en base 4:

```
101 | 4
100   25 | 4
(1)   24   6 | 4
     (1)  4   (1)
         (2)
```

Por lo tanto:

$245_{(6)} = 1211_{(4)} = \overline{abcd}_{(4)}$

Nos piden:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 7$

4 Si: $13_{14_{(\overline{pq})}} = 51_{(8)}$

Calcula: $p + q + 2$

Resolución:

$13_{14_{(\overline{pq})}} = 51_{(8)}$

$\overline{pq} + 3 + 4 = 5 \times 8 + 1$

$\overline{pq} + 7 = 40 + 1$

$\overline{pq} = 41 - 7$

$\overline{pq} = 34$

Nos piden: $p + q + 2 = 3 + 4 + 2 = 9$

5 Calcula el valor de a, si: $\overline{a(a-1)}_{(a+2)} = 23_{(7)}$

Resolución:

Del enunciado:

$\overline{a(a-1)}_{(a+2)} = 23_{(7)}$

$a \times (a + 2) + a - 1 = 2 \times 7 + 3$

$a^2 + 2a + a - 1 = 17$

$a^2 + 3a - 18 = 0$

```
a    +6
   X
a    -3    ⇒ (a + 6)(a − 3) = 0
```

$a = -6 \vee a = 3$

Luego, el valor de a debe ser un número positivo, entonces: $a = 3$

6 Calcula $\overline{a(a+1)(a+2)}$ en base 3, si: $\overline{11a31}_{(4)} = \overline{15a}_{(9)} + \overline{14aa}_{(5)}$

Resolución:

Realizamos la descomposición polinómica de cada numeral:

$\overline{11a31}_{(4)} = \overline{15a}_{(9)} + \overline{14aa}_{(5)}$

$1 \times 4^4 + 1 \times 4^3 + a \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$

$= 1 \times 9^2 + 5 \times 9 + a + 1 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + a \times 5 + a$

$256 + 64 + 16a + 13 = 81 + 45 + a + 125 + 100 + 5a + a$

$333 + 16a = 351 + 7a$

$9a = 18$

$a = 2$

Luego, reemplazamos el valor de a en el numeral:

$\overline{a(a+1)(a+2)} = 234$

El número 234 en base 3 es igual a:

```
234 | 3
234   78 | 3
(0)   78   26 | 3
     (0)   24   8 | 3
          (2)   6  (2)
               (2)
```

Por lo tanto, el número 234 en base 3 es $22200_{(3)}$.

7 Si los numerales están correctamente escritos, halla: $a + b + c$

$140_{(a)}$; $\overline{2aa}_{(c)}$; $\overline{3c4}_{(b)}$; $\overline{b62}_{(8)}$

Resolución:

En cada numeral se observa:

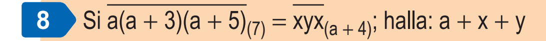
- $140_{(a)} \Rightarrow 4 < a$
- $\overline{2aa}_{(c)} \Rightarrow a < c$
- $\overline{3c4}_{(b)} \Rightarrow c < b$
- $\overline{b62}_{(8)} \Rightarrow b < 8$

Luego:

$$4 < a < c < b < 8$$

$\downarrow$ a = 5, c = 6, b = 7

Nos piden: $a + b + c = 5 + 6 + 7 = 18$



8 Si $\overline{a(a+3)(a+5)}_{(7)} = \overline{xyx}_{(a+4)}$; halla: $a + x + y$

Resolución:

En el numeral $\overline{a(a+3)(a+5)}_{(7)}$; se observa que:

$0 < a$

$a + 5 < 7 \Rightarrow a < 2$

Luego: $a = 1$

Además:

$$146_{(7)} = \overline{xyx}_{(5)}$$
$$1 \times 7^2 + 4 \times 7 + 6 = \overline{xyx}_{(5)}$$
$$83 = \overline{xyx}_{(5)}$$

Expresamos 83 en base 5:

$$\begin{array}{r|l} 83 & 5 \\ \hline 80 & 16 \;|\; 5 \\ \hline (3) & 15 \;\;\; (3) \\ & (1) \end{array}$$

Entonces: $83 = 313_{(5)} = \overline{xyx}_{(5)}$

Por lo tanto: $x = 3$; $y = 1$

Nos piden: $a + x + y = 1 + 3 + 1 = 5$

9 Si $\overline{61(b+2)}_{(7)} = \overline{1bb5}_{(n)}$, halla b.

Resolución:

Por propiedad:

$$\overset{-}{\overline{61(b+2)}}_{\underset{+}{(7)}} = \overset{+}{\overline{1bb5}}_{\underset{-}{(n)}} \Rightarrow 5 < n < 7$$

$n \downarrow 6$

Luego, reemplazamos y descomponemos polinómicamente:

$$\overline{61(b+2)}_{(7)} = \overline{1bb5}_{(6)}$$
$$6 \times 7^2 + 1 \times 7 + b + 2 = 1 \times 6^3 + b \times 6^2 + b \times 6 + 5$$
$$294 + 7 + b + 2 = 216 + 36b + 6b + 5$$
$$303 - 221 = 42b - b$$
$$82 = 41b$$
$$b = \frac{82}{41}$$
$$b = 2$$

10 Halla $a + b + c$; si: $\overline{bc7} = \overline{aaa}_{(9)}$

Resolución:

Descomponemos polinómicamente el numeral $\overline{aaa}_{(9)}$ en la expresión planteada:

$$\overline{bc7} = \overline{aaa}_{(9)}$$
$$\overline{bc7} = a \times 9^2 + a \times 9 + a$$
$$\overline{bc7} = 81a + 9a + a \Rightarrow \overline{bc7} = 91a$$

Luego, **a** es una cifra menor que 9, tal que al multiplicarla por 91, resulte un número de tres cifras que termine en 7, entonces:

$$\overline{bc7} = 91a$$

$a \downarrow 7 \Rightarrow \overline{bc7} = 637$

Por lo tanto: $a = 7$; $b = 6$; $c = 3$

Nos piden: $a + b + c = 7 + 6 + 3 = 16$

11 Si: $\sqrt{\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} - 41_{(5)}} = 10$

Calcula $q^p + a + 8$ expresado en base 3.

Resolución:

Elevamos al cuadrado ambos miembros y operamos:

$$\left(\sqrt{\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} - 41_{(5)}}\right)^2 = 10^2$$
$$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} - 41_{(5)} = 100$$
$$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} - (4 \times 5 + 1) = 100$$
$$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} - 21 = 100$$
$$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} = 121$$
$$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} = 11 \times 11$$

Como $\overline{aa}$ es un numeral de dos cifras en el sistema decimal, el único valor que podrá tomar es 11.

Luego:

$$\overline{10p}_{(q)} \times \overline{aa} = 11 \times 11$$

$$\Rightarrow \overset{+}{\overline{10p}}_{\underset{-}{(q)}} = \overset{-}{11}_{\underset{+}{(10)}}$$

Se observa que: $p < q < 10$ ... (I)

Descomponemos polinómicamente el numeral $\overline{10p}_{(q)}$:

$q^2 + p = 11$ ... (II)

Teniendo en cuenta que $q > 1$ (por ser base), buscamos valores que cumplan (I) y (II):

Si: $q = 2$; $p = 7$ ✗

Si: $q = 3$; $p = 2$ ✓

Si $q \geq 4$; p tomara valores negativos.

Por lo tanto: $p = 2$; $q = 3$; $a = 1$

Nos piden la siguiente expresión en base 3:

$$q^p + a + 8 = 3^2 + 1 + 8 = 18$$

Ahora:

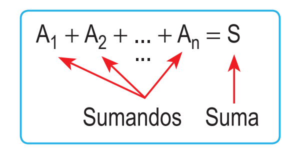
$$\begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \hline 18 & 6 \;|\; 3 \\ \hline 0 & 6 \;\;\; 2 \\ & 0 \end{array}$$

$\therefore 18 = 200_{(3)}$

OPERACIONES BÁSICAS EN EL CONJUNTO $\mathbb{Z}^+$

ADICIÓN

Es la operación que consiste en reunir varias cantidades homogéneas en una sola. Presenta la siguiente forma:



Ejemplo:

Si a + b + c = 19; calcula $\overline{1ab} + \overline{2bc} + \overline{1ca}$.

Resolución:

Al ordenar verticalmente los términos de la adición, tenemos:

$$\begin{array}{l} 210 \leftarrow \text{Orden} \\ \overline{1ab}\ + \\ \overline{2bc} \\ \overline{1ca} \\ \hline 609 \end{array}$$

- En el orden 0: b + c + a = 19
  Se escribe el 9 y llevamos 1 al siguiente orden (orden 1).
- En el orden 1: a + b + c + 1 = 19 + 1 = 20
  Se escribe el 0 y llevamos 2 al siguiente orden (orden 2).
- En el orden 2: 1 + 2 + 1 + 2 = 6

$\therefore\ \overline{1ab} + \overline{2bc} + \overline{1ca} = 609$

SUSTRACCIÓN

Es la operación inversa a la suma, en la cual, dadas dos cantidades llamadas minuendo y sustraendo, se desea obtener una tercera llamada diferencia, que determine la cantidad de unidades que le falta al sustraendo para igualar al minuendo. Se denota:

$$M - S = D$$

Donde: M es el minuendo, S el sustraendo y D la diferencia.

Propiedades de la sustracción

1. El minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia.

$$M = S + D$$

2. La suma de los tres términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.

$$M + S + D = 2M$$

3. Si $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{pq}$, donde a > b, entonces se cumple:

$$p + q = 9 \qquad \overline{pq} = 9(a - b)$$

4. Si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{pqr}$, donde a > b, entonces se cumple:

$$p + r = 9 \qquad q = 9 \qquad \overline{pqr} = 99(a - c) \qquad a - c = p + 1$$

Ejemplo:

¿Cuál es la diferencia en una sustracción cuya suma de términos es 470, si además se sabe que el sustraendo es la quinta parte del minuendo?

Resolución:

Sea la sustracción: M – S = D

Por dato:

$\underbrace{M + S + D}_{} = 470$

2M = 470

$M = \frac{470}{2} \Rightarrow M = 235$

Además:

$S = \frac{M}{5}$

$S = \frac{225}{5} \Rightarrow S = 47$

Nos piden:

M – S = D

$235 - 47 = D \Rightarrow D = 188$

Nota

Las propiedades de la adición en $\mathbb{Z}$ son:

Clausura
$\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a + b $\in \mathbb{Z}$

Conmutativa
$\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a + b = b + a

Asociativa
$\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$:
(a + b) + c = a + (b + c)

Del elemento neutro aditivo
$\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a + 0 = 0 + a = a

Del inverso aditivo
$\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a + (–a) = 0

Atención

Sumas notables:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Observación

La propiedad 1 nos permitirá verificar si la sustracción ha sido efectuada correctamente.

Observación

Método práctico para hallar el C. A. de un número

A partir del menor orden, se observa la primera cifra significativa, la cual se le va a restar de 10 y las demás cifras de 9. Es decir:

C. A. $(\overline{abc00})$

$= \overline{(9-a)(9-b)(10-c)00}$

Ejemplos:

- C. A. (4521) (9 9 9 10)
  $= \overline{(9-4)(9-5)(9-2)(10-1)}$
  = 5479
- C. A. (48 100) (9 9 10)
  $= \overline{(9-4)(9-8)(10-1)00}$
  = 51 900

Recuerda

Si el número de términos de una progresión aritmética es impar, existirá un único término central el cual se calcula así:

$$t_c = \frac{t_1 + t_n}{2}$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO (C. A.)

Es lo que le falta a un número para ser igual a una unidad del orden inmediato superior de su cifra de mayor orden.

Ejemplos:

1. Halla el C. A. de 43.

Resolución:
Observamos que la cifra de mayor orden del número 43 corresponde a las decenas (orden 1). Entonces tenemos que calcular la cantidad que le falta para completar una centena (orden inmediato superior de su cifra de mayor orden), es decir: C. A. (43) = 100 – 43 = 10^2 – 43 = 57

2. Halla el C. A. de 723.

Resolución:
La cifra de mayor orden en el número 723 corresponde a las centenas (orden 2). Entonces tenemos que calcular la cantidad que le falta para completar un millar, es decir: C. A. (723) = 1000 – 723 = 10^3 – 723 = 277
En forma práctica, si un número N tiene k cifras, se cumple:

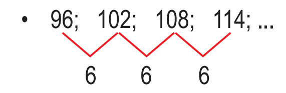
$$\text{C. A. }(N) = 10^k - N$$

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Es un conjunto de números ordenados de tal manera que la diferencia entre dos términos consecutivos es una cantidad constante llamada **razón aritmética**.

Ejemplos:

- 265; 268; 271; 274; ... (3, 3, 3)
- 96; 102; 108; 114; ... (6, 6, 6)



En general: t_1; t_2; t_3; ...; t_n; ... (r, r)

Donde: t_1 es el primer término, t_n el término enésimo, r la razón y n el número de términos.

Veamos las siguientes fórmulas:

1. Término general:
$$t_n = t_1 + r \times (n-1)$$
2. Razón:
$$r = t_2 - t_1 = t_n - t_{n-1}$$
3. Número de términos:
$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$
4. Suma de términos:
$$S = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right) \times n$$

Ejemplo:
Sea la siguiente sucesión: 19; 25; 31; 37; ...; 333. Calcula la suma de sus téminos.

Resolución:
Se observa: $t_n = 19 + 6(n-1) = 13 + 6n$

Hallamos el número de términos: 333 = 13 + 16n ⇒ n = 20

Luego: $S = \left(\frac{19 + 333}{2}\right) \times 20 = 3520$

Conteo de cifras usadas en una progresión aritmética

Sea N un número entero positivo de k cifras. La cantidad de cifras que se utiliza al escribir todos los números enteros desde 1 hasta N, está dado por:

$$\text{Cantidad de cifras usadas} = (N+1)k - \underbrace{111 \ldots 11}_{k \text{ cifras}}$$

MÉTODO COMBINATORIO

Sirve para determinar cuántos números de cierta cantidad de cifras existen en un determinado sistema de numeración. Para esto, se halla para cada cifra el número de valores que puede asumir en la determinada base. El producto de estos valores nos da el número de combinaciones.

Ejemplo:
¿Cuántos números de tres cifras existen en el sistema senario?

Ten en cuenta

Cuando en un numeral aparezcan cifras repetidas o dependientes, solo se analizará una de ellas.

Resolución:

$$\overline{abc}_{(6)}$$

a	b	c
1	0	0
2	4	1
⋮	⋮	⋮
5	5	5
↓	↓	↓

$5 \times 6 \times 6 = 180$

Se observa que la cifra de mayor orden en un número, es distinta de cero.
Por lo tanto, en el sistema senario existen 180 numerales de tres cifras.

Nota

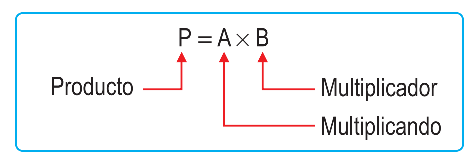
- (n.° par) × ...5 = ...0
  (n.° impar) × ...5 = ...5
- $\forall k \in \mathbb{Z}$:
  $k \times (k + 1)$ = (n.° par)

MULTIPLICACIÓN

Es una operación de adición donde todos los sumandos son iguales, tal como la siguiente expresión:

$$P = \underbrace{A + A + A + ... + A}_{B \text{ veces}}$$

Se puede expresar en forma abreviada:



Algoritmo de la multiplicación

Multiplicando → 9 7 5 ×
Multiplicador → 2 8 6

Productos parciales:
5 8 5 0 → 975 × 6
7 8 0 0 → 975 × 8
1 9 5 0 → 975 × 2

Producto → 2 7 8 8 5 0

DIVISIÓN

Es una operación matemática inversa a la multiplicación, que consiste en obtener un número entero positivo denominado **cociente**, a partir de otros dos enteros positivos llamados **dividendo** y **divisor.**

Clases de división

División exacta

Es aquella división en la que el dividendo es exactamente igual al producto del divisor por el cociente.

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline q & \end{array} \Rightarrow D = d \times q$$

División inexacta

Es aquella división en la cual se va a obtener un nuevo término llamado **residuo**.

A su vez se subclasifica en:

División inexacta por defecto	División inexacta por exceso
$\begin{array}{l\|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow D = d \times q + r$ Donde: D es el dividendo, d es el divisor, q el cociente y r el residuo. Ejemplo: $\begin{array}{l\|l} 50 & 8 \\ \hline 48 & 6 \\ \hline 2 & \end{array} \Rightarrow 50 = 8 \times 6 + 2$	$\begin{array}{l\|l} D & d \\ \hline r_e & q_e \end{array} \Rightarrow D = d \times q_e - r_e$ Donde: D es el dividendo, d el divisor, q_e el cociente por exceso y r_e el residuo por exceso. Ejemplo: $\begin{array}{l\|l} 50 & 8 \\ \hline 56 & 7 \\ \hline 6 & \end{array} \Rightarrow 50 = 8 \times 7 - 6$

Propiedades de la división inexacta

1. 0 < residuo < d
2. $r_{máximo} = d - 1$
   $r_{mínimo} = 1$
3. $r + r_e = d$
4. $q_e = q + 1$

Recuerda

Las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ son:

Clausura
$\forall a, b \in \mathbb{Z}: a \times b \in \mathbb{Z}$

Conmutativa
$\forall a, b \in \mathbb{Z}: a \times b = b \times a$

Asociativa
$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Del elemento neutro multiplicativo
$\forall a \in \mathbb{Z}: a \times 1 = a$

Del inverso multiplicativo
$\forall a \in \mathbb{Z} - \{0\}: a \times a^{-1} = 1$

Distributiva
$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Atención

Determinación a priori de la cantidad de cifras de un producto y un cociente

Ejemplo:
¿Cuántas cifras como mínimo y máximo puede tener $\frac{A \times B^2}{C^3}$, si A, B y C tienen 6, 4 y 2 cifras, respectivamente?

Resolución
$10^5 \leq A < 10^6$
$10^3 \leq B < 10^4 \Rightarrow 10^6 \leq B^2 < 10^8$
$10 \leq C < 10^2 \Rightarrow 10^3 \leq C^3 < 10^6$
$\frac{1}{10^6} < \frac{1}{C^3} < \frac{1}{10^3}$

Luego:
$\frac{10^5 \times 10^6}{10^6} < \frac{A \times B^2}{C^3} < \frac{10^6 \times 10^8}{10^3}$
$10^5 < \frac{A \times B^2}{C^3} < 10^{10}$
$\therefore \frac{A \times B^2}{C^3}$ tiene 6 cifras como mínimo y 9 cifras como máximo.

Problemas resueltos

1 Si $a + b + c + d = 23$, calcula:
$A = \overline{abcd} + \overline{badc} + \overline{cdab} + \overline{dcba}$

Resolución:

Disponemos los términos de forma vertical:

$$\begin{array}{ccccc} & ② & ② & ② & \\ & a & b & c & d\;+ \\ & b & a & d & c \\ & c & d & a & b \\ & d & c & b & a \\ \hline 2 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{array}$$

Del dato tenemos:
$a + b + c + d = 23$
La suma (23) no se altera al cambiar el orden de los sumandos: a; b; c y d.

$\therefore A = 25\,553$

2 Si: $\overline{1x} + \overline{2x} + \overline{3x} + \overline{4x} + ... + \overline{9x} = \overline{zy2}$
Calcula: $(x + y)z$

Resolución:

Ordenamos verticalmente los sumandos:

$$\left.\begin{array}{r} \overline{1x}\;+ \\ \overline{2x} \\ \overline{3x} \\ \vdots \\ \overline{9x} \end{array}\right\}\text{9 sumandos}$$
$$\overline{zy2}$$

Observamos:
$9x = ...2$
$\Rightarrow x = 8$, llevo 7
$7 + \underbrace{(1 + 2 + 3 + ... + 9)}_{45} = \overline{zy}$
$52 = \overline{zy}$

Entonces:
$z = 5 \wedge y = 2$
$\therefore (x + y)z = (8 + 2)5 = 50$

3 Si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{7mn}$, calcula $m \times n$.

Resolución:

Por propiedad, si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$, entonces:
$x + z = 9 \wedge y = 9$

En el problema:
$7 + n = 9 \quad \wedge \quad m = 9$
$n = 2$

Piden:
$m \times n = 9 \times 2 = 18$

4 Si C. A. $(\overline{abcd}) = \overline{abc}$, calcula: $a \times c + d$

Resolución:

C. A. $(\overline{abcd}) = \overline{abc}$
$\overline{(9 - a)(9 - b)(9 - c)(10 - d)} = \overline{abc}$

Analizamos cifra por cifra:

- $9 - a = 0 \Rightarrow a = 9$
  $\Rightarrow 9 - b = a$
- $9 - b = 9 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 9 - c = b$
  $9 - c = 0 \Rightarrow c = 9$
- $10 - d = c \Rightarrow 10 - d = 9 \Rightarrow d = 1$

Piden: $a \times c + d = 9 \times 9 + 1 = 82$

5 La suma de los tres términos de una sustracción es 798. Además, el sustraendo es la tercera parte del minuendo. Calcula la suma de cifras de la diferencia.

Resolución:

Del enunciado:
Sea la diferencia: $M - S = D$
$\underbrace{M + S + D}_{2M} = 798$

$2M = 798 \Rightarrow M = 399$

Por dato:
$S = \dfrac{M}{3} = \dfrac{399}{3} \Rightarrow S = 133$

Luego: $D = M - S = 266$

Piden la suma de cifras de la diferencia: $2 + 6 + 6 = 14$

6 Si $\overline{1ab} \times$ C. A. $(\overline{ab}) = 9711$, calcula $a \times b$.

Resolución:

Del enunciado:
$\overline{1ab} \times$ C. A. $(\overline{ab}) = 9711$
$(100 + \overline{ab})(100 - \overline{ab}) = 9711$
$(100)^2 - (\overline{ab})^2 = 9711$
$(\overline{ab})^2 = 289 \Rightarrow \overline{ab} = 17$

Nos piden calcular: $a \times b = 7$

7 Calcula la suma de la siguiente progresión aritmética:
$\underbrace{\overline{10a}; 116; ...; \overline{a01}}_{37 \text{ términos}}$

Resolución:

Hallamos la razón:
$r = 116 - \overline{10a} = 116 - (100 + a) \Rightarrow r = 16 - a$

Luego, utilizamos la siguiente fórmula para calcular el valor de a:

$n = \dfrac{t_n - t_1}{r} + 1 \Rightarrow 37 = \dfrac{\overline{a01} - \overline{10a}}{16 - a} + 1$

$36 = \dfrac{(100a + 1) - (100 + a)}{16 - a}$

$576 - 36a = 99a - 99 \Rightarrow 675 = 135a \Rightarrow a = 5$

Luego: $\underbrace{105; 116; ...; 501}_{37 \text{ términos}}$

Por último, calculamos la suma de términos:

$S = \left(\dfrac{501 + 105}{2}\right) \times 37 = 11\,211$

8 La diferencia de los términos de lugar 25 y 16 de una progresión aritmética es 36. Si el noveno término es 39, halla el sexto término.

Resolución:

$t_{25} - t_{16} = 36 \Rightarrow t_1 + 24r - (t_1 + 15r) = 36$
$r = 4$

Además:
$t_9 = 39 \Rightarrow t_1 + 8r = 39 \Rightarrow t_1 + 8(4) = 39 \Rightarrow t_1 = 7$

Luego:
$t_6 = t_1 + 5r = 7 + 5(4)$
$t_6 = 27$

9 Halla a + b + c, si:
$\ldots abc \times 7 = \ldots 5481$

Resolución:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle (5)(2)} \\ \ldots a\ b\ c \times \\ 7 \\ \hline \ldots 5\ 4\ 8\ 1 \end{array}$$

$7c = \ldots 1 \Rightarrow c = 3$ (llevo 2)
$7b + 2 = \ldots 8$
$7b = \ldots 6 \Rightarrow b = 8$ (llevo 5)
$7a + 5 = \ldots 4$
$7a = \ldots 9 \Rightarrow a = 7$

Piden: $a + b + c = 7 + 8 + 3 = 18$

10 Al multiplicar $\overline{abc} \times 74$ se observa que los productos parciales suman 3949. Halla: a + b + c

Resolución:

$$\begin{array}{r} \overline{a\ b\ c} \times \\ 7\ 4 \\ \hline *\ *\ *\ * \\ *\ *\ *\ * \\ \hline *\ *\ *\ *\ * \end{array}$$

→ 1.er producto parcial: $4 \times \overline{abc}$
→ 2.° producto parcial: $7 \times \overline{abc}$ (+)
3949

Luego $11(\overline{abc}) = 3949 \Rightarrow \overline{abc} = 359$

Nos piden calcular:
$a + b + c = 17$

11 Si: $\overline{abc} \times 59 = \ldots 083$
$\overline{abc} \times 22 = \ldots 014$
Halla la suma de las 3 últimas cifras de $\overline{abc} \times 74$.

Resolución:

$\overline{abc} \times 59 = \ldots 083$
$\overline{abc} \times 22 = \ldots 014$ (–)

$\overline{abc} \times 37 = \ldots 069$ ...(1)

Multiplicando la expresión (1) por 2:
$2(\overline{abc} \times 37 = \ldots 069) \Rightarrow \overline{abc} \times 74 = \ldots 138$
$\therefore$ Suma de cifras: $1 + 3 + 8 = 12$

12 La suma de dos números es 930, su cociente es 17 y el residuo de su división es el mayor posible. Halla los números.

Resolución:

Sean los números a y b.

Por dato: $a + b = 930$ ...(1)
$a = b \times 17 + r_{máx.}$ ...(2)

$\Rightarrow r_{máx.} = b - 1$

De (2):
$a = 17b + r = 18b - 1$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1):
$(18b - 1) + b = 930$
$\Rightarrow b = 49$

Reemplazando b = 49 en (1):
$a + 49 = 930 \Rightarrow a = 881$

$\therefore$ Los números son: 881 y 49

13 En una división, el dividendo es 538, el residuo por defecto es 5 veces el residuo por exceso y este último es igual a 2. Halla el cociente.

Resolución:

Del enunciado: $r_e = 2 \wedge r = 5(2) = 10$

Por propiedad sabemos: $r + r_e = d \Rightarrow d = 10 + 2 = 12$

En toda división se cumple:
$D = dq + r$
$538 = 12q + 10$
$528 = 12q$
$\Rightarrow q = 44$

Luego, el valor del cociente es 44.

14 La suma de los 4 términos de una división inexacta es 213, el cociente es 7 y el residuo es 3. Calcula el divisor.

Resolución:

Del enunciado:
$q = 7; r = 3 \wedge D + d + q + r = 213$
$\Rightarrow D + d + 7 + 3 = 213 \Rightarrow D + d = 203$ ...(1)

Sabemos:
$D = d \times q + r$
$\Rightarrow D = 7d + 3$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$(7d + 3) + d = 203 \Rightarrow d = 25$

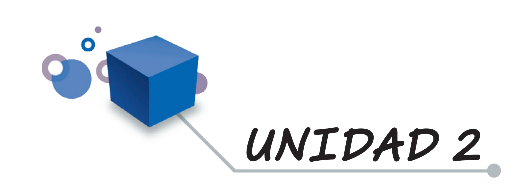
15 El número de páginas de un libro está comprendido entre 400 y 500. ¿Cuál es el número de páginas, si en total se necesitaron 1188 cifras?

Resolución:

Número de páginas:
$1; 2; \ldots; \overline{4ab}$
n.° de páginas de una cifra: $9 \times 1 = 9$
n.° de páginas con 2 cifras: $(99 - 10 + 1) \times 2 = 180$
n.° de páginas con 3 cifras: $(\overline{4ab} - 100 + 1) \times 3 = (\overline{4ab} - 99) \times 3$

Del enunciado:
$3(\overline{4ab}) - 297 + 189 = 1188$
$3(\overline{4ab}) = 1296$
$\overline{4ab} = 432$

Luego, el número de páginas del libro es 432.



TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que se encarga de estudiar las condiciones que debe cumplir un número entero para que sea divisible por otro número entero positivo.

DIVISIBILIDAD

Se dice que A es divisible por B, si al dividir A entre B, la división es exacta.

$$\text{A es divisible por B} \Leftrightarrow \begin{array}{r|l} A & B \\ \hline 0 & q \end{array}$$ Donde: $A \in \mathbb{Z}$; $B \in \mathbb{Z}^+$; $q \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

- $\begin{array}{r|l} 36 & 9 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \Rightarrow$ 36 es divisible por 9
- $\begin{array}{r|l} -21 & 3 \\ \hline 0 & -7 \end{array} \Rightarrow$ −21 es divisible por 3

Nota

Si A es divisible por B, se dice:

A —es múltiplo de→ B
A ←es divisor de— B

Ejemplo:
- 12 es múltiplo de 3.
- 3 es divisor de 12.

MULTIPLICIDAD

Un número entero es múltiplo de otro número entero positivo, si es el resultado de multiplicar dicho número, por otro número entero cualquiera.

$$\text{A es múltiplo de B} \Leftrightarrow A = B \times K$$ Donde: $A \in \mathbb{Z}$; $B \in \mathbb{Z}^+$; $K \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

- $45 = 5 \times 9 \Rightarrow$ 45 es múltiplo de 5
- $-15 = 5 \times -3 \Rightarrow$ −15 es múltiplo de 5

Notación:

Para expresar que A es múltiplo de B escribiremos: $A = \overset{\circ}{B}$

Observaciones

a) Los divisores de un número entero forman un conjunto finito y los múltiplos un conjunto infinito. Por ejemplo:

6 → Divisores de 6 = {1; 2; 3; 6}
6 → Múltiplos de 6 = {...; −18; −12; −6; 0; 6; 12; 18; ...}

b) Si A no es múltiplo de B, entonces A se puede representar de la siguiente manera:

$$A = \overset{\circ}{B} + r_d = \overset{\circ}{B} - r_e$$ Donde: $r_d + r_e = B$

Ejemplos:

- Como $37 \neq \overset{\circ}{5}$

  $\begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \hline 2 & 7 \end{array} \Rightarrow 37 = 5 \times 7 + 2$

  $37 = \overset{\circ}{5} + 2 = \overset{\circ}{5} - 3$

- Como $13 \neq \overset{\circ}{4}$

  $\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \Rightarrow 13 = 4 \times 3 + 1$

  $13 = \overset{\circ}{4} + 1 = \overset{\circ}{4} - 3$

Atención

Debes tener en cuenta lo siguiente:
- El cero es múltiplo de todos los números enteros positivos.
- La unidad es divisor de todos los números enteros.

c) Si el producto de dos números es múltiplo de "n" y uno de ellos no tiene ningún divisor distinto de una unidad común con n, entonces el otro es múltiplo de n.

Ejemplos:

- $3 \,.\, m = \overset{\circ}{7} \Rightarrow m = \overset{\circ}{7}$
- $5 \,.\, a = \overset{\circ}{3} \Rightarrow a = \overset{\circ}{3}$

d) Si A es múltiplo de B, entonces A es múltiplo de cada uno de los divisores de B.

Ejemplos:

- $A = \overset{\circ}{15}$, entonces $\begin{cases} A = \overset{\circ}{1} \\ A = \overset{\circ}{3} \\ A = \overset{\circ}{5} \\ A = \overset{\circ}{15} \end{cases}$
- $A = \overset{\circ}{14}$, entonces $\begin{cases} A = \overset{\circ}{1} \\ A = \overset{\circ}{2} \\ A = \overset{\circ}{7} \\ A = \overset{\circ}{14} \end{cases}$

e) Se cumple:

$$A = \overset{\circ}{B} \wedge A = \overset{\circ}{C} \Rightarrow A = \overset{\circ}{\overline{MCM(B;\,C)}}$$

Ejemplos:

- Si $A = \overset{\circ}{3} \wedge A = \overset{\circ}{5} \Rightarrow A = \overset{\circ}{\overline{MCM(3;\,5)}}$
  $A = \overset{\circ}{15}$
- Si $A = \overset{\circ}{12} \wedge A = \overset{\circ}{15} \Rightarrow A = \overset{\circ}{\overline{MCM(12;\,15)}}$
  $A = \overset{\circ}{60}$

f) Todo número es múltiplo de la base en la que está representado, más la última cifra de dicho número.

$$\overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{n} + e$$

Ejemplos:

- $243_{(7)} = \overset{\circ}{7} + 3$
- $248_{(9)} = \overset{\circ}{9} + 8$

DIVISIBILIDAD APLICADA AL BINOMIO DE NEWTON

Se utiliza generalmente para determinar el residuo cuando el dividendo es una potencia.

$$(\overset{\circ}{n} + r)^k = \overset{\circ}{n} + r^k \;;\; k \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos:

- $(\overset{\circ}{9} + 2)^2 = \overset{\circ}{9} + 2^2$
  $= \overset{\circ}{9} + 4$
- $(\overset{\circ}{13} - 2)^3 = (\overset{\circ}{13} + (-2))^3$
  $= \overset{\circ}{13} + (-2)^3$
  $= \overset{\circ}{13} - 2^3 = \overset{\circ}{13} - 8$

Observación

$$(\overset{\circ}{n} - r)^k = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + r^k;\ k \text{ par} \\ \overset{\circ}{n} - r^k;\ k \text{ impar} \end{cases}$$

Donde: $k \in \mathbb{Z}^+$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por potencias de 2

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} \Longleftrightarrow e = \overset{\circ}{2}$
$\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} \Longleftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{4}$
$\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \Longleftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8}$

Ejemplo:
Calcula la suma de valores de m, tal que $\overline{783m} = \overset{\circ}{4}$.
Como: $\overline{783m} = \overset{\circ}{4}$
Se tiene: $\overline{3m} = \overset{\circ}{4} \Rightarrow m = 2 \vee m = 6$
$\therefore$ La suma de valores de m es: $2 + 6 = 8$

Divisibilidad por potencias de 5

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{5} \Longleftrightarrow e = \overset{\circ}{5}$
$\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \Longleftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25}$
$\overline{abcde} = \overset{\circ}{125} \Longleftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{125}$

Ejemplo:
¿Cuál es la suma de los valores de m y n para que el numeral $\overline{87653mn}$ sea divisible por 125?

Del enunciado:
$\overline{87653mn} = \overset{\circ}{125}$
$\Rightarrow \overline{3mn} = \overset{\circ}{125}$
$\overline{3mn} = 375$
$\Rightarrow m = 7 \wedge n = 5$
$\therefore m + n = 7 + 5 = 12$

Divisibilidad por 3 y 9

$\overline{abcde} = \overset{\circ}{3} \Longleftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{3}$
$\overline{abcde} = \overset{\circ}{9} \Longleftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$

Ejemplos:

- Calcula a, si $\overline{67a414} = \overset{\circ}{9}$.
  $6 + 7 + a + 4 + 1 + 4 = \overset{\circ}{9}$
  $22 + a = \overset{\circ}{9}$
  → 5
  $\therefore a = 5$
- Si $\overline{257m} = \overset{\circ}{3}$, ¿cuántos valores toma m?
  $2 + 5 + 7 + m = \overset{\circ}{3}$
  $14 + m = \overset{\circ}{3}$
  → 1; 4; 7
  $\therefore$ m toma 3 valores

Nota

Principios fundamentales
Operaciones aritméticas básicas sobre números que son múltiplos de un mismo número.

1. **Adición**
   $\underbrace{15}_{\overset{\circ}{5}} + \underbrace{25}_{\overset{\circ}{5}} = \underbrace{40}_{\overset{\circ}{5}}$
   En general:
   $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
2. **Sustracción**
   $\underbrace{30}_{\overset{\circ}{3}} - \underbrace{12}_{\overset{\circ}{3}} = \underbrace{18}_{\overset{\circ}{3}}$
   En general:
   $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
3. **Multiplicación**
   $\underbrace{21}_{\overset{\circ}{7}} \times 3 = \underbrace{63}_{\overset{\circ}{7}}$
   En general:
   $\overset{\circ}{n} \,.\, k = \overset{\circ}{n}$; $k \in \mathbb{Z}$
4. **Potenciación**
   $4^3 = 64$
   $(\overset{\circ}{2})^3 = \overset{\circ}{2}$
   En general:
   $(\overset{\circ}{n})^k = \overset{\circ}{n}$; $k \in \mathbb{Z}^+$

Recuerda

Si $r > 0$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$(-r)^k = \begin{cases} r^k;\ \text{si k es par} \\ -r^k;\ \text{si k es impar} \end{cases}$$

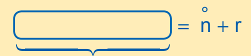
Divisibilidad por 7

$$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{7} \iff -2a - 3b - c + 2d + 3e + f = \overset{\circ}{7}$$

a b c d e f
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 3 1 2 3 1
– +

Observación

Si $\overline{abcd...xyz} = \overset{\circ}{n} + r$
Entonces:



$= \overset{\circ}{n} + r$

Relación de criterio de divisibilidad por n.

Ejemplo:
Calcula n, si $\overline{5n7} = \overset{\circ}{11} + 4$.

$\overline{5n7} = \overset{\circ}{11} + 4$
\+ – +

$\Rightarrow 5 - n + 7 = \overset{\circ}{11} + 4$

$8 - n = \overset{\circ}{11}$

$\therefore n = 8$

Ejemplos:

- Calcula a, si $\overline{13a372}$ es divisible por 7.

$\overline{13a372} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow -2 - 9 - a + 6 + 21 + 2 = \overset{\circ}{7}$

1 3 a 3 7 2
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
2 3 1 2 3 1
– +

$18 - a = \overset{\circ}{7}$

$\therefore a = 4$

- Si $\overline{583m} = \overset{\circ}{7}$, calcula la suma de los posibles valores de m.

$\overline{583m} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow m + 9 + 16 - 5 = \overset{\circ}{7}$

5 8 3 m
↓ ↓ ↓ ↓
1 2 3 1
– +

$m + 20 = \overset{\circ}{7}$

→ 1; 8

$\therefore 1 + 8 = 9$

Divisibilidad por 11

$$\overline{abcde} = \overset{\circ}{11} \iff a - b + c - d + e = \overset{\circ}{11}$$

a b c d e
\+ – + – +
←

Ejemplos:

- Calcula el valor de b, si $\overline{14b17}$ es divisible por 11.

$\overline{14b17} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow 1 - 4 + b - 1 + 7 = \overset{\circ}{11}$
\+ – + – +
←

$b + 3 = \overset{\circ}{11}$
↓
8

$\therefore b = 8$

- Si $\overline{68m5n} = \overset{\circ}{11}$, calcula el máximo valor de m + n.

$\overline{68m5n} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow 6 + m + n - 8 - 5 = \overset{\circ}{11}$
\+ – + – +

$\underbrace{m + n}_{7;\ 18} - 7 = \overset{\circ}{11}$

$\therefore (m + n)_{máx.} = 18$

Divisibilidad por 13

$$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{13} \iff 4a + 3b - c - 4d - 3e + f = \overset{\circ}{13}$$

a b c d e f
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
4 3 1 4 3 1
\+ – +

Ejemplos:

- Calcula b, si $\overline{128b306}$ es divisible por 13.

Como: $\overline{128b306} = \overset{\circ}{13}$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
1 4 3 1 4 3 1
\+ – +

$\Rightarrow 1 + 8 + 24 - b - 12 - 0 + 6 = \overset{\circ}{13}$

$27 - b = \overset{\circ}{13}$

$\therefore b = 1$

- Si $\overline{3472m} = \overset{\circ}{13}$, calcula el valor de m.

$\overline{3472m} = \overset{\circ}{13}$
3 1 4 3 1
\+ – +

$\Rightarrow 9 - 4 - 28 - 6 + m = \overset{\circ}{13}$

$m - 29 = \overset{\circ}{13}$

$\therefore m = 3$

Atención

Propiedad

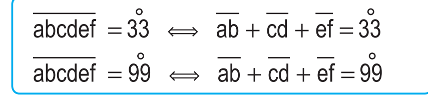
$(\overset{\circ}{n} + a)(\overset{\circ}{n} + b) = \overset{\circ}{n} + a \times b$

Ejemplo:

$(\overset{\circ}{7} + 2)(\overset{\circ}{7} + 3) = \overset{\circ}{7} + 2 \times 3$

$= \overset{\circ}{7} + 6$

Divisibilidad por 33 y 99



$$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{33} \iff \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{33}$$

$$\overline{abcdef} = \overset{\circ}{99} \iff \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{99}$$

Ejemplos:

- Calcula m + n, si $\overline{34mn12}$ es divisible por 99.

$\overline{34mn12} = \overset{\circ}{99} \Rightarrow 34 + \overline{mn} + 12 = \overset{\circ}{99}$

$46 + \overline{mn} = \overset{\circ}{99}$

$\Rightarrow m = 5 \land n = 3$

$\therefore m + n = 8$

- Si $\overline{572ab42} = \overset{\circ}{33}$, ¿cuántos valores toma a + b?

$\overline{572ab42} = \overset{\circ}{33} \Rightarrow 5 + 72 + \overline{ab} + 42 = \overset{\circ}{33}$

$119 + \overline{ab} = \overset{\circ}{33}$
↓
13
46
79

$\therefore$ a + b toma 3 valores.

Problemas resueltos

1 En un aula del 2.° grado hay 40 alumnos, se sabe que de los niños; 1/3 utiliza lentes y 1/11 usa reloj. Calcula el número de niñas.

Resolución:

Sean:
a: número de niños
b: número de niñas

Del enunciado: $a + b = 40$ ...(I)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Utilizan lentes: } \frac{a}{3} \Rightarrow a = \overset{\circ}{3} \\ \text{Utilizan reloj: } \frac{a}{11} \Rightarrow a = \overset{\circ}{11}\end{array}\right\} a = \overset{\circ}{33} \Rightarrow a = 33 \ (a < 40)$$

Reemplazamos el valor de a en (I):
$33 + b = 40 \Rightarrow b = 7$
$\therefore$ El número de niñas es 7.

2 De la sucesión siguiente: 1; 2; 3; ...; 600
¿Cuántos números no son múltiplos de 3 ni de 5?

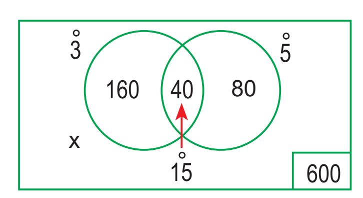
Resolución:

Números $\overset{\circ}{3}$: $\frac{600}{3} = 200$

Números $\overset{\circ}{5}$: $\frac{600}{5} = 120$

Números $\overset{\circ}{15}$: $\frac{600}{15} = 40$

Luego:



Entonces: $x + 160 + 40 + 80 = 600$
$x + 280 = 600 \Rightarrow x = 320$
$\therefore$ Hay 320 números que no son $\overset{\circ}{3}$ ni $\overset{\circ}{5}$.

3 Halla el residuo de dividir: $M = 943 \times 884$ entre 7.

Resolución:

$$943 \times 884 = \overset{\circ}{7} + r$$
$$(\overset{\circ}{7} + 5)(\overset{\circ}{7} + 2) = \overset{\circ}{7} + r$$
$$\overset{\circ}{7} + 10 = \overset{\circ}{7} + r$$
$$\overset{\circ}{7} + 3 = \overset{\circ}{7} + r \Rightarrow r = 3$$

4 ¿Cuántos números enteros positivos de dos cifras múltiplos de 19 existen?

Resolución:

Del enunciado:
$\overline{ab} = \overset{\circ}{19} \Rightarrow \overline{ab} = 19k$

k: 1; 2; ...; 5
$\therefore$ Existen 5 números que cumplen dicha condición.

5 Si se convierte 30^{100} a base 7, calcula la cifra de orden cero.

Resolución:

$$\overline{abc...x}_{(7)} = 30^{100}$$
$$\overset{\circ}{7} + x = (\overset{\circ}{7} + 2)^{100}$$
$$\overset{\circ}{7} + x = \overset{\circ}{7} + 2^{100} = \overset{\circ}{7} + (2^3)^{33} \cdot 2$$
$$\overset{\circ}{7} + x = \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1)^{33} \cdot 2$$
$$\overset{\circ}{7} + x = (\overset{\circ}{7} + 1^{33})2 = \overset{\circ}{7} + 2 \Rightarrow x = 2$$

6 Calcula **a**, si: $\underbrace{\overline{aaa \ldots a}}_{29 \text{ cifras}} = \overset{\circ}{9} + 6$

Resolución:

Como: $\underbrace{\overline{aaa \ldots a}}_{29 \text{ cifras}} = \overset{\circ}{9} + 6$

$$29a = \overset{\circ}{9} + 6$$
$$(\overset{\circ}{9} + 2)a = \overset{\circ}{9} + 6$$
$$2a - 6 = \overset{\circ}{9}$$
$$a - 3 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 3$$

7 Determina el numeral de la forma:
$\overline{mpn} = 66(m - p + n)$

Resolución:

$\overline{\underset{+-+}{mpn}} = 66(m + n - p) \Rightarrow \overline{mpn} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow m + n - p = \overset{\circ}{11}$

Luego:
$\overline{mpn} = 66 \cdot 11 \Rightarrow \overline{mpn} = 726$

8 Calcula a + b si: $\overline{5a10b} = \overset{\circ}{72}$

Resolución:

$\overline{5a10b} = \overset{\circ}{72}$

Entonces:

$$\overline{5a10b} = \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{8} \end{cases}$$

Primero analizamos la divisivilidad por 8:
$\overline{5a10b} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow \overline{10b} = \overset{\circ}{8}$
b = 4 (único valor)

Luego, analizamos la divisibilidad por 9:

$$\overline{5a104} = \overset{\circ}{9}$$
$$\Rightarrow 5 + a + 1 + 0 + 4 = \overset{\circ}{9}$$
$$10 + a = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 8$$

Piden:
$a + b = 8 + 4 = 12$

9 Calcula un número capicúa de tres cifras que sea divisible por 7 y 9. Da como respuesta el número de soluciones.

Resolución:

Sea el numeral: $\overline{aba} = \begin{cases} \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$

- $\overline{aba} = \overset{\circ}{7}$

  $\overset{231}{\overline{aba}} = \overset{\circ}{7}$ ($+$)

  $\Rightarrow 3(a + b) = \overset{\circ}{7}$

  $a + b = \overset{\circ}{7}$

- $\overline{aba} = \overset{\circ}{9}$

  $2a + b = \overset{\circ}{9}$

a	b
2	5
3	3
4	1
5	8
6	6
7	4
8	2
9	0

Luego, tenemos: $a = 2$ y $b = 5$

$\therefore$ Solo hay una solución.

10 Determina un numeral capicúa de tres cifras que sea divisible por 77. Da como respuesta la suma de las cifras del numeral.

Resolución:

Sea el numeral: $\overline{aba} = \overset{\circ}{77}$, entonces $\overline{aba}$ es $\overset{\circ}{11}$ y $\overset{\circ}{7}$.

- $\overline{aba} = \overset{\circ}{7}$

  $\overset{231}{\overline{aba}} = \overset{\circ}{7}$

  $3(a + b) = \overset{\circ}{7}$

  $a + b = \overset{\circ}{7}$ ...(1)

- $\overline{aba} = \overset{\circ}{11}$

  $\overset{+-+}{a\,b\,a} = \overset{\circ}{11}$

  $2a - b = \overset{\circ}{11}$

a	b	
1	2	no cumple con (1)
6	1	cumple

Por lo tanto: $a = 6 \wedge b = 1$
Luego, el numeral será: 616
Suma de cifras: $6 + 1 + 6 = 13$

11 Calcula el valor de a en:
$\overline{1a74b} = \overset{\circ}{104}$

Resolución:

$\overline{1a74b} = \overset{\circ}{104}$, entonces $\overline{1a74b}$ es $\overset{\circ}{13}$ y $\overset{\circ}{8}$.

- $\overline{1a74b} = \overset{\circ}{8}$

  $\Rightarrow \overline{74b} = \overset{\circ}{8}$

  $b = 4$ (único valor)

- $\overline{1a744} = \overset{\circ}{13}$

  $\overset{3\,1\,4\,3\,1}{1\,a\,7\,4\,4} = \overset{\circ}{13}$ ($+\ -\ +$)

  $3 - a - 28 - 12 + 4 = \overset{\circ}{13}$

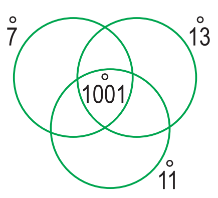
  $a + 33 = \overset{\circ}{13} \Rightarrow a = 6$

Por lo tanto: $a = 6$

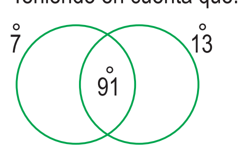
12 Halla cuántos números entre 95 000 y 194 000 son $\overset{\circ}{7}$ y $\overset{\circ}{13}$ pero no $\overset{\circ}{11}$.

Resolución:

Sabemos que MCM(7; 13) = 91 y MCM(7; 11; 13) = 1001, gráficamente:



Teniendo en cuenta que:



Luego:
$95\,000 < 91k < 194\,000$
$1043{,}96 < k < 2131{,}87$
$k: \underbrace{1044; 1045; ...; 2131}_{1088\ \text{números}}$

También:
$95\,000 < 1001n < 194\,000$
$94{,}91 < n < 193{,}81$
$n: \underbrace{95; 96; ...; 193}_{99\ \text{números}}$

$\therefore$ Entre 95 000 y 194 000 hay $1088 - 99 = 989$ números $\overset{\circ}{7}$ y $\overset{\circ}{13}$ pero no $\overset{\circ}{11}$.

13 Si: $\overline{ab} = \overset{\circ}{31}$, $\overline{bc} = \overset{\circ}{19}$ y $\overline{cd} = \overset{\circ}{17}$. Calcula: $a + b + c + d$

Resolución:

Posibles valores de $\overline{ab}$: 31, 62, 93

$\overline{ab}$ no puede ser 31 porque $\overline{bc} = 19$ y $\overline{cd} = 9$... pero ningún $\overset{\circ}{17}$ de 2 cifras empieza con 9.

$\overline{ab}$ no puede ser 62 porque $\overline{bc} = 2$... pero ningún $\overset{\circ}{19}$ de 2 cifras empieza con 2.

Luego: $\overline{ab} = 93 \wedge \overline{bc} = 38 \wedge \overline{cd} = 85$
$\Rightarrow a = 9; b = 3; c = 8; d = 5$
$\therefore a + b + c + d = 25$

14 Un estudiante efectúa la operación: $435^3 \times 524 - 476 \times 596$, sin hacer uso de la calculadora. Si luego por casualidad borra dos cifras iguales del resultado, quedando así: $\overline{x313166280x}$. Halla $x^3 - 1$.

Resolución:

Se tiene: $435^3 \times 524 - 476 \times 596 = \overline{x313166280x}$
Se sabe también que cualquier número se puede expresar como un múltiplo de nueve, más la suma de sus cifras. Entonces:

$435 = \overset{\circ}{9} + 4 + 3 + 5 = \overset{\circ}{9} + 3$

$524 = \overset{\circ}{9} + 5 + 2 + 4 = \overset{\circ}{9} + 2$

$476 = \overset{\circ}{9} + 4 + 7 + 6 = \overset{\circ}{9} + 8$

$596 = \overset{\circ}{9} + 5 + 9 + 6 = \overset{\circ}{9} + 2$

$\overline{x313166280x} = \overset{\circ}{9} + x + 3 + 1 + 3 + 1 + 6 + 6 + 2 + 8 + 0 + x$
$= \overset{\circ}{9} + 3 + 2x$

Luego:

$(\overset{\circ}{9} + 3)^3 \times (\overset{\circ}{9} + 2) - (\overset{\circ}{9} + 8)(\overset{\circ}{9} + 2) = \overset{\circ}{9} + 3 + 2x$

$(\overset{\circ}{9} + 27) \times (\overset{\circ}{9} + 2) - (\overset{\circ}{9} + 16) = \overset{\circ}{9} + 3 + 2x$

$\overset{\circ}{9} \times (\overset{\circ}{9} + 2) - \overset{\circ}{9} + 2 = \overset{\circ}{9} + 3 + 2x$

$\overset{\circ}{9} + 2 = \overset{\circ}{9} + 3 + 2x$

$\Rightarrow 2x = \overset{\circ}{9} + 8$

$x = \overset{\circ}{9} + 4 \quad \therefore x = 4$

Nos piden: $x^3 - 1 = 4^3 - 1 = 64 - 1 = 63$

NÚMERO PRIMO ABSOLUTO

Es aquel número entero positivo, mayor que 1, que tiene únicamente dos divisores: la unidad (1) y el mismo número.

Veamos algunos ejemplos:

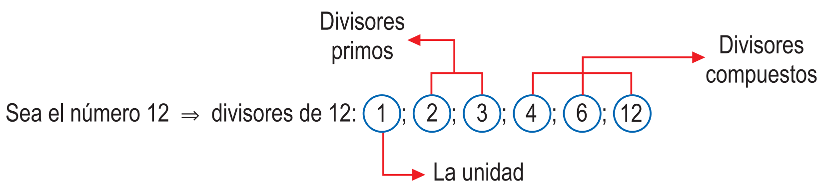
- El número 2 solo es divisible por 1 y por 2. Entonces, 2 es primo.
- El número 11 solo es divisible por 1 y por 11. Entonces, 11 es primo.

NÚMERO COMPUESTO

Es aquel número entero positivo que posee más de dos divisores.
Veamos algunos ejemplos:

- El número 4 es divisible por 1; 2 y 4. Entonces, 4 es compuesto.
- El número 21 es divisible por 1; 3; 7 y 21. Entonces, 21 es compuesto.

Observa, atentamente, el caso siguiente:



En general, sea N un número compuesto, entonces se cumple:

$$CD(N) = CD_P + CD_C + 1$$

Donde:
CD(N): cantidad de divisores de N.
CD_P: cantidad de divisores primos de N.
CD_C: cantidad de divisores compuestos de N.

Recuerda

Los números primos menores que 100 son:

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESÍ)

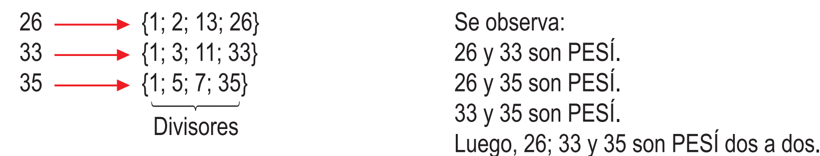
Un grupo de dos o más números son PESÍ si tienen como único divisor común a la unidad.
Veamos un ejemplo: ¿serán 10; 12 y 21 números PESÍ?

10 → {1; 2; 5; 10}
12 → {1; 2; 3; 4; 6; 12}
21 → {1; 3; 7; 21}
Divisores

10; 12 y 21 son PESÍ.

NÚMEROS PESÍ DOS A DOS

Dado un conjunto de 3 o más números enteros positivos, se dice que son PESÍ 2 a 2 cuando al compararlos en grupos de 2 siempre resultan ser PESÍ.
Veamos un ejemplo: ¿serán 26; 33 y 35 números PESÍ dos a dos?



Se observa:
26 y 33 son PESÍ.
26 y 35 son PESÍ.
33 y 35 son PESÍ.
Luego, 26; 33 y 35 son PESÍ dos a dos.

Nota

- El único número primo par es 2.
- La sucesión de números primos es infinita.
- 2 y 3 son los únicos números primos consecutivos.
- Dos números enteros consecutivos son PESÍ.
- Dos números enteros impares consecutivos son PESÍ.

Regla para determinar si un número es primo absoluto

Veamos si 173 es primo. Observa, atentamente, el siguiente procedimiento:

Paso 1	Paso 2	Paso 3
Se extrae la raíz cuadrada aproximada del número. $\sqrt{173} \approx 13{,}15$	Enumera los números primos menores o iguales a esta aproximación: 2; 3; 5; 7; 11 y 13	Si la división entre el número y cada uno de los números primos hallados resulta inexacta, decimos que el número es primo, en caso contrario no lo es. $173 = \overset{\circ}{2} + 1$, $173 = \overset{\circ}{3} + 2$, $173 = \overset{\circ}{5} + 3$, $173 = \overset{\circ}{7} + 5$, $173 = \overset{\circ}{11} + 8$, $173 = \overset{\circ}{13} + 4$. Por lo tanto, 173 es un número primo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA (TEOREMA DE GAUSS)

Todo número entero positivo mayor que la unidad se puede expresar, de manera única, como la multiplicación de sus divisores primos elevados a ciertos exponentes enteros positivos. A esta descomposición se le denomina "descomposición canónica".

Sea N un número compuesto, entonces su descomposición canónica es:

$$N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta}$$

Donde a, b y c son números primos y; α, β y θ son números enteros positivos.
Ejemplo:
Veamos la descomposición canónica de 72; 210 y 360.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$\Rightarrow 72 = 2^3 \times 3^2$

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

$\Rightarrow 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Nota

Siguiendo el mismo procedimiento, hallamos la tabla de divisores de 252.

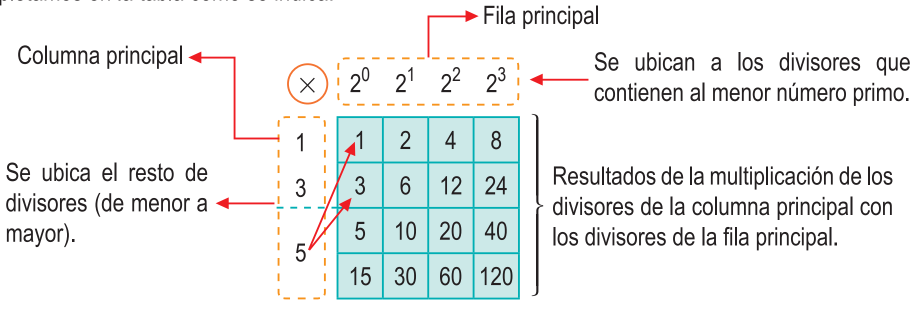
$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

	2^0	2^1	2^2
3^0	1	2	4
3^1	3	6	12
3^2	9	18	36
7	7	14	28
	21	42	84
	63	126	252

TABLA DE DIVISORES DE UN NÚMERO

Calculamos la tabla de divisores de 120.

- Determina la descomposición canónica de 120.
  $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
- Completamos en la tabla como se indica:



×	2^0	2^1	2^2	2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
5	5	10	20	40
	15	30	60	120

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Dada la descomposición canónica de un número, es posible determinar de un modo directo la cantidad de divisores del número, el producto de los divisores del número, etc.

Cantidad de divisores de un número (CD)

Sea $N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta}$, entonces:

$$CD(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)$$

Veamos algunos ejemplos:

- $12 = 2^2 \times 3^1$
  $CD(12) = (2 + 1)(1 + 1) = 3 \times 2$
  $\Rightarrow CD(12) = 6$
- $15 = 3^1 \times 5^1$
  $CD(15) = (1 + 1)(1 + 1) = 2 \times 2$
  $\Rightarrow CD(15) = 4$

Observación

La cantidad de **divisores simples** de un número entero positivo es igual a:

$CD_{simples} = CD_{primos} + 1$

La unidad

Suma de divisores de un número (SD)

Sea $N = a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta}$, entonces:

$$SD(N) = \left(\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1} - 1}{c - 1}\right)$$

Veamos algunos ejemplos:

- $12 = 2^2 \times 3^1$
  $SD(12) = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1}\right) = 7 \times 4$
  $\Rightarrow SD(12) = 28$
- $15 = 3^1 \times 5^1$
  $SD(15) = \left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right) = 4 \times 6$
  $\Rightarrow SD(15) = 24$

Suma de las inversas de los divisores (SID)

Sea N el número:

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$$

Veamos un ejemplo:

- $100 = 2^2 \times 5^2$

  $SD(100) = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{5^3 - 1}{5 - 1}\right) = 7 \times 31 \Rightarrow SD(100) = 217$

  Luego:

  $SID(100) = \frac{217}{100}$

  $\therefore\ SID(100) = 2{,}17$

Producto de los divisores (PD)

Sea N el número:

$$PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}$$

Veamos un ejemplo:

- $12 = 2^2 \times 3^1$

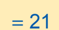
  $CD(12) = (2 + 1)(1 + 1) = 3 \times 2 \Rightarrow CD(12) = 6$

  Luego:

  $PD(12) = \sqrt{12^6} = 12^{6/2} = 12^3$

  $\therefore\ PD(12) = 1728$

> **Atención**
>
> La suma de divisores de un número entero positivo N, que son múltiplos de m, es igual a:
>
> $$m \times SD\left(\frac{N}{m}\right)$$
>
> Ejemplo:
> La suma de los divisores de 12, múltiplos de 3 es:
>
> $3 \times SD\left(\frac{12}{3}\right) = 3 \times SD(4)$
>
> $= 3 \times \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)$
>
> $= 21$



NÚMERO DE MANERAS EN LAS QUE SE PUEDE EXPRESAR UN NÚMERO ENTERO COMO EL PRODUCTO DE DOS DE SUS DIVISORES

Veamos algunos ejemplos:

1. Expresa 80 como el producto de 2 de sus divisores.

   1×80 2×40 4×20 5×16 8×10 } Existen 5 maneras

2. Expresa 144 como el producto de 2 de sus divisores.

   1×144 2×72 3×48 4×36 6×24 8×18 12×12 16×9 } Existen 8 maneras

Regla práctica:

El número de maneras de expresar un número entero N como el producto de dos de sus divisores, es igual a:

- $\frac{CD(N)}{2}$; si CD(N) es par.
- $\frac{CD(N) + 1}{2}$; si CD(N) es impar.

Veamos algunos ejemplos:

- ¿De cuántas formas se puede expresar 432 como el producto de 2 números enteros positivos?

  Resolución:

  $432 = 2^4 \times 3^3$

  $CD(432) = (4 + 1) \times (3 + 1)$

  $CD(432) = 20 \leftarrow$ es par

  Entonces, el número de maneras de expresar 432 como el producto de dos números enteros positivos es:

  $\frac{CD(N)}{2} = \frac{20}{2} = 10$

  $\therefore$ El número 432 se puede expresar de 10 formas.

- ¿De cuántas formas se puede expresar 1764 como el producto de 2 números enteros positivos?

  Resolución:

  $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$

  $CD(1764) = (2 + 1) \times (2 + 1) \times (2 + 1)$

  $CD(1764) = 27 \leftarrow$ impar

  Entonces, el número de maneras de expresar 1764 como el producto de dos números enteros positivos es:

  $\frac{CD(N) + 1}{2} = \frac{27 + 1}{2} = 14$

  $\therefore$ El número 1764 se puede expresar de 14 formas.

> **Recuerda**
>
> El producto de divisores de un número entero positivo N, que son múltiplos de m es igual a:
>
> $$m^{CD\left(\frac{N}{m}\right)} \times PD\left(\frac{N}{m}\right)$$
>
> Ejemplo:
> El producto de divisores de 18, que son múltiplos de 3 es:
>
> $3^{CD\left(\frac{18}{3}\right)} \times PD\left(\frac{18}{3}\right) = 3^{CD(6)} \times PD(6)$
>
> $= 3^4 \times 6^2 = 2916$

Problemas resueltos

1 Halla x, si el número N tiene 24 divisores.
$N = 2^x . 45$

Resolución:

Descomponiendo canónicamente al número N:
$N = 2^x . 9 . 5 = 2^x . 3^2 . 5^1$
Por dato:

$$CD(N) = 24$$
$$(x + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$$
$$(x + 1) . 3 . 2 = 24$$
$$x + 1 = 4$$
$$x = 3$$

2 Halla la suma de divisores de 72.

Resolución:

$72 = 2^3 . 3^2$

$$SD(72) = \left(\frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1}\right)$$

$$SD(72) = \left(\frac{2^4 - 1}{1}\right)\left(\frac{3^3 - 1}{2}\right) = (15)(13)$$

$\therefore$ $SD(72) = 195$

3 Halla a + b, si el número M tiene 171 divisores compuestos.
$M = 10^a . 9^b$

Resolución:

Hallamos la descomposición canónica de M:
$M = 2^a . 3^{2b} . 5^a$

Se tiene:
$CD(M) = (a + 1)(2b + 1)(a + 1)$
$CD_P = 3 \rightarrow \{2; 3; 5\}$
$CD_C = 171$ (dato)

Sabemos:

$$CD(M) = CD_P + CD_C + 1$$
$$(a + 1)(2b + 1)(a + 1) = 3 + 171 + 1$$
$$(a + 1)^2(2b + 1) = 175 = 25 . 7$$
$$(a + 1)^2(2b + 1) = (4 + 1)^2(2 \times 3 + 1) \Rightarrow a = 4 \quad \wedge \quad b = 3$$

Piden: $a + b = 4 + 3 = 7$

4 Si $\overline{xx55}$ tiene 20 divisores, halla la suma de estos.

Resolución:

Por descomposición canónica:
$A = \overline{xx55} = 5 . 11 . (20x + 1)$ ...(I)
Por dato: $CD(A) = 20 = 2 . 2 . 5$ ...(II)
Comparando (I) y (II):
Sea: $(20x + 1) = a^4$; (a: n.° primo)
Cumple: $a = 3 \Rightarrow 20x + 1 = 3^4 \Rightarrow x = 4$

Luego: $A = 5^1 . 11^1 . 3^4$

Piden: $SD(A) = \left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right)\left(\frac{11^2 - 1}{11 - 1}\right)\left(\frac{3^5 - 1}{3 - 1}\right) \Rightarrow SD(A) = 8712$

5 Si $N = 15 \times 30^n$ tiene 294 divisores, halla n.

Resolución:

Descomponemos N:
$N = 3 \times 5 \times (2 \times 3 \times 5)^n = 2^n \times 3^{n+1} \times 5^{n+1}$
$\Rightarrow CD(N) = (n + 1)(n + 2)(n + 2)$
$294 = (n + 1)(n + 2)^2$
$6 \times 7^2 = (n + 1)(n + 2)^2$
$\Rightarrow n + 1 = 6 \quad \therefore n = 5$

6 ¿Cuántos ceros deben colocarse a la derecha de 7 para que el número así escrito tenga 72 divisores?

Resolución:

Sea N la cantidad de ceros:
$\underbrace{700 ... 0}_{n \text{ ceros}} = 7 \times 10^n = 7 \times (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n \times 7$
$\Rightarrow CD(700 ... 0) = (n + 1)(n + 1)(1 + 1)$
$72 = 2(n + 1)^2 \Rightarrow n = 5$

$\therefore$ Deben colocarse 5 ceros.

7 Si $N = 7^{n+2} - 7^n$ tiene 86 divisores compuestos, halla n.

Resolución:

$N = 7^{n+2} - 7^n = 7^n(7^2 - 1)$
$N = 7^n \times 48 = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$
$CD(N) = (4 + 1)(1 + 1)(n + 1)$
$CD(N) = 10(n + 1)$
Además:
$CD(N) = 3 + 86 + 1$
$10(n + 1) = 90 \Rightarrow n + 1 = 9 \quad \therefore n = 8$

8 Sabiendo que $A = 15 \times 24^n$ tiene 4/3 de la cantidad de divisores que $B = 15^n . 24$, halla n.

Resolución:

Descomponemos A y B:
$A = (3 \times 5)(2^3 \times 3)^n = 2^{3n} \times 3^{n+1} \times 5$
$B = (3 \times 5)^n(2^3 \times 3) = 2^3 \times 3^{n+1} \times 5^n$
Del enunciado:
$(3n + 1)(n + 2)(1 + 1) = \frac{4}{3}[(3 + 1)(n + 2)(n + 1)]$

$$2(3n + 1) = \frac{16}{3}(n + 1)$$
$$3(3n + 1) = 8(n + 1)$$
$$9n + 3 = 8n + 8 \Rightarrow n = 5$$

9 ¿Cuántos divisores de 720 no son múltiplos de 6?

Resolución:

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

$CD(720) = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) \Rightarrow CD(720) = 30$

Hallamos la cantidad de divisores múltiplos de 6:

$720 = 6(\underbrace{2^3 \times 3 \times 5})$

$CD_{\overset{\circ}{6}} = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$

$\Rightarrow CD_{\overset{\circ}{6}} = 16$

∴ La cantidad de divisores de 720 que no son múltiplos de 6 es 14.

10 Al multiplicar por 21 al número $N = 35 \cdot 3^n$, se duplica su cantidad de divisores. Halla n.

Resolución:

$N = 5 \times 7 \times 3^n$

$CD(N) = (1 + 1)(1 + 1)(n + 1)$

$CD(N) = 2 \times 2(n + 1) = 4(n + 1)$

Luego:

$21N = 3 \times 7(5 \times 7 \times 3^n) = 3^{n+1} \times 5 \times 7^2$

$CD(21N) = (n + 2)(1 + 1)(2 + 1)$

$CD(21N) = 6(n + 2)$

Del enunciado:

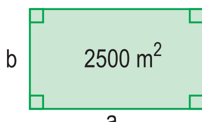
$6(n + 2) = 2[4(n + 1)]$

$3(n + 2) = 4(n + 1)$

$3n + 6 = 4n + 4 \Rightarrow n = 2$

11 ¿Cuántos terrenos de forma rectangular se podrán formar con la condición que sus lados sean cantidades enteras, en un área rectangular disponible de 2500 m²?

Resolución:



Área: $a \times b = 2500$

Sabemos que:

$2500 = 2^2 \times 5^4$

Entonces:

$CD(2500) = (2 + 1)(4 + 1) = 15$

Se cumple:

n.° de terrenos = n.° de formas de descomponer un número como el producto de dos de sus divisores.

Como la cantidad de divisores de 2500 es impar; entonces:

$\text{n.° de terrenos} = \dfrac{15 + 1}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

Por lo tanto, se podrán formar 8 terrenos.

12 ¿Cuántos términos debe tener P para que tengan en total 961 divisores?

$$P = 36 \times 36^2 \times 36^3 \times 36^4 \times ... \times 36^n$$

Resolución:

Del enunciado $P = 36^{1+2+3+...+n} = 36^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Entonces:

$P = (2^2 \times 3^2)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{n(n+1)} \times 3^{n(n+1)}$

Por dato: $CD(P) = 961$

$[n(n+1) + 1] \times [n(n+1)+1] = 961$

$[n(n+1)+1]^2 = 31^2$

$n(n+1) = 30 = 5 \times 6$

$\Rightarrow n = 5$

∴ P debe tener 5 términos.

13 Si 49^k tiene n divisores, ¿cuántos divisores tiene 343^k?

Resolución:

$49^k = (7^2)^k = 7^{2k} \Rightarrow CD(7^{2k}) = n$

$2k + 1 = n$

$k = \dfrac{n - 1}{2}$

Piden: $CD(343^k) = CD(7^{3k}) = 3k + 1 = 3\left(\dfrac{n - 1}{2}\right) + 1$

$\therefore CD(343^K) = \dfrac{3n - 1}{2}$

14 Si $N = 2 \times 3^a \times 7^b$ tiene 40 divisores divisibles por 9 y 30 divisores pares. Halla $a \times b$.

Resolución:

Del enunciado, N tiene 40 divisores divisibles por 9.

Se tiene: $N = 3^2 \times (2^1 \times 3^{a-2} \times 7^b)$

Entonces: $CD_{\overset{\circ}{9}}(N) = 40$

$(1 + 1)(a - 2 + 1)(b + 1) = 40$

$(a - 1)(b + 1) = 20$ ...(1)

También, N tiene 30 divisores pares.

Se tiene: $N = 2 \times (3^a \times 7^b)$

Entonces: $CD_{\overset{\circ}{2}}(N) = 30$

$(a + 1)(b + 1) = 30$ ...(2)

Dividiendo (2) entre (1):

$\dfrac{a + 1}{a - 1} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow a = 5;\ b = 4$

Piden: $a \times b = 5 \times 4 = 20$

15 Si N descompuesto canónicamente es $a^c \times c^a \times b$, tal que tiene 24 divisores, donde $b > c > a$. ¿Cuántos divisores tendría N^3?

Resolución:

Del enunciado: $N = a^c \times c^a \times b$ (a, b y c son primos)

Además: $CD(N) = 3 \times 2 \times 4 = (2 + 1)(1 + 1)(3 + 1)$

Luego: $a = 2;\ c = 3\ (c > a)$

Entonces: $N = 2^3 \times 3^2 \times b$

Piden:

$CD(N^3) = CD(2^9 \times 3^6 \times b^3) = (9 + 1)(6 + 1)(3 + 1)$

$CD(N^3) = 280$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El máximo común divisor de dos o más números enteros positivos, es el mayor de los divisores positivos comunes de dichos números.

Atención

Los divisores comunes de un conjunto de números son también divisores de su MCD.

Ejemplo:
Divisores de 12: 1; 2; 3; 4; 6; 12
Divisores de 18: 1; 2; 3; 6, 9; 18 $\Rightarrow$ Divisores comunes: 1; 2; 3; 6
Divisores de 30: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30
El mayor divisor común positivo de 12; 18 y 30 es 6. Por lo tanto: MCD(12; 18; 30) = 6

Métodos para calcular el MCD

Por descomposición simultánea
El MCD de un conjunto de números enteros positivos, se obtiene multiplicando los factores comunes extraídos de dichos números.

Ejemplo:

36	-	54	-	90	2	
18	-	27	-	45	3	
6	-	9	-	15	3	$\Rightarrow$ MCD(36; 54; 90) = $2 \times 3 \times 3 = 18$
(2)	-	(3)	-	(5)		

PESÍ

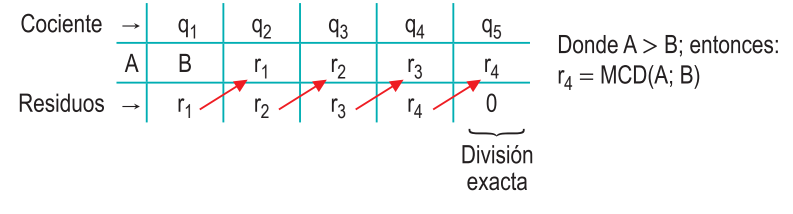
Por descomposición canónica
El MCD de un conjunto de números enteros positivos descompuestos canónicamente, es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo:
$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$
$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ $\Rightarrow$ MCD(540; 600; 450) = $2 \times 3 \times 5 = 30$
$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

Nota

- $A = \overset{\circ}{\overline{MCD(A; B)}}$
- $B = \overset{\circ}{\overline{MCD(A; B)}}$
- MCD(1; A; B; C; ...) = 1
- MCD(A; A + 1; B; C; D; ...) = 1

Por algoritmo de Euclides o divisiones sucesivas
El procedimiento para hallar el MCD de A y B (A > B) mediante el algoritmo de Euclides es el siguiente:
1.° Se divide A por B, obteniéndose cociente q_1 y residuo r_1.
2.° Se divide B por r_1, obteniéndose cociente q_2 y residuo r_2.
3.° Se divide r_1 por r_2, obteniéndose cociente q_3 y residuo r_3.
Y así sucesivamente, hasta que la división sea exacta. De esta última división, que es exacta, el divisor será el MCD.
Para emplear este procedimiento usamos el siguiente esquema:



Cociente →		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
	A	B	r_1	r_2	r_3	r_4
Residuos →		r_1	r_2	r_3	r_4	0

División exacta

Donde A > B; entonces:
r_4 = MCD(A; B)

Ejemplo:
Halla el MCD de 1037 y 850 mediante el algoritmo de Euclides.

Resolución:

	1	4	1	1	5
1037	850	187	102	85	(17)
	187	102	85	17	0

$\therefore$ MCD(1037; 850) = 17

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mínimo común múltiplo de dos o más números enteros positivos, es el menor múltiplo positivo común de dichos números.

Ejemplo:
Múltiplos positivos de 14: 14; 28; 42; 56; 70, 84; ...
Múltiplos positivos de 21: 21; 42; 63; 84; ... $\Rightarrow$ Múltiplos comunes: 42; 84; 126; ...
Múltiplos positivos de 42: 42; 84; 126; ...
El menor múltiplo común positivo de 14; 21 y 42 es 42; es decir: MCM(14; 21; 42) = 42

Atención

Los múltiplos comunes de un conjunto de números son también multiplos de su MCM.

Métodos para calcular el MCM

Por descomposición simultánea

El MCM de un conjunto de números enteros positivos se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes.

Ejemplo:

72	108	180	2
36	54	90	2
18	27	45	2
9	27	45	3
3	9	15	3
1	3	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

$\Rightarrow$ MCM(72; 108; 180) = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 1080$

Por descomposición canónica

El MCM de un conjunto de números enteros positivos descompuestos canónicamente se obtiene multiplicando los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo:
$A = 2^5 \times 3^2 \times 5^2$
$B = 2^4 \times 3^3 \times 5^3$ $\Rightarrow$ MCM(A; B; C) = $2^5 \times 3^3 \times 5^4$
$C = 2 \times 3 \times 5^4$

PROPIEDADES DEL MCD Y EL MCM

1. Si A y B son PESÍ, entonces: MCD(A; B) = 1 MCM(A; B) = $A \times B$	2. Si $A = \overset{\circ}{B}$, entonces: MCD(A; B) = B MCM(A; B) = A
3. MCD(kA; kB; kC) = $k \times$ MCD(A; B; C) MCM(kA; kB; kC) = $k \times$ MCM(A; B; C)	4. $\text{MCD}\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{\text{MCD}(A; B; C)}{n}$ $\text{MCM}\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{\text{MCM}(A; B; C)}{n}$
5. Para dos números A y B se cumple: MCD(A; B) $\times$ MCM(A; B) = $A \times B$	6. Si MCD(A; B) = d; A = dp y B = dq, siendo p y q PESÍ, se cumple: MCM(A; B) = dpq
7. Si: $A = N^a - 1$ $B = N^b - 1$ $C = N^c - 1$ Entonces: MCD(A; B; C) = $N^{\text{MCD}(a;\, b;\, c)} - 1$	8. MCD(A; B; C; D) = MCD[MCD(A; B); MCD(C; D)] MCM(A; B; C; D) = MCM[MCM(A; B); MCM(C; D)]

Nota

MCM(A; B) = $\overset{\circ}{A}$
MCM(A; B) = $\overset{\circ}{B}$

Problemas resueltos

1 El MCD de dos números es 9. ¿Cuál es su MCM si el producto de dichos números es 1620?

Resolución:

Sean los números A y B.
Por dato, tenemos:
$MCD(A; B) = 9$
$A \times B = 1620$

Por propiedad:
$MCD(A; B) \times MCM(A; B) = 1620$
$9 \times MCM(A; B) = 1620$
$\therefore MCM(A; B) = 180$

2 Halla dos números sabiendo que su suma es 280 y su MCM es 480.

Resolución:

Sean los números A y B.
Además: $MCD(A; B) = d$
$\Rightarrow A = dp \wedge B = dq$ (p y q son PESÍ)

Por dato:
$A + B = 280 \quad \wedge \quad MCM(A; B) = 480$
$d . p + d . q = 280 \qquad d . p . q = 480$
$d = \dfrac{280}{p + q}$ ...(I) $\qquad d = \dfrac{480}{p . q}$ ...(II)

De (I) y (II):
$$\frac{280}{p+q} = \frac{480}{p . q} \Rightarrow \frac{p . q}{p+q} = \frac{12}{7}$$

Como p y q son PESÍ, entonces $p = 4$ y $q = 3$.
En (I): $d = 40$

$\therefore \; A = 40(4) \wedge B = 40(3)$
$A = 160 \qquad B = 120$

3 Halla la suma de dos números, uno de 20 divisores y otro de 12 divisores, sabiendo que su MCM es 720.

Resolución:

Sean los números M y N; tal que $CD(M) = 20$ y $CD(N) = 12$.
$MCM(M; N) = 720$ ...(1)
$CD_M = 20; CD_N = 12$ ...(2)

$MCD(M; N) = k \Rightarrow M = kC_1 \wedge N = kC_2$
En (1): $k . C_1 . C_2 = 720 = 30 . 8 . 3$

Los números son:
$M = 30 . 8 = 240 \Rightarrow CD_M = 20$ divisores
$N = 30 . 3 = 90 \Rightarrow CD_N = 12$ divisores
$\therefore M + N = 240 + 90 = 330$

4 El MCM de 2 números impares consecutivos es 323. Halla la suma de dichos números.

Resolución:

Recuerda, dos números enteros impares consecutivos son siempre PESÍ.

Sean A y B dos números impares consecutivos, entonces:
$$\underbrace{MCM(A; B)} = A \times B$$
$$323 = A \times B$$
$$17 \times 19 = A \times B$$

Nos piden:
$A + B = 17 + 19 = 36$

5 Calcula el MCD de:
$$A = \underbrace{11 ... 1}_{20 \text{ cifras}}{}_{(2)} \text{ y } B = \underbrace{77 ... 77}_{10 \text{ cifras}}{}_{(8)}$$
Exprésalo en base 32 y da como respuesta el producto de sus cifras.

Resolución:

Por propiedad:
$A = \underbrace{11 ... 11}_{20 \text{ cifras}}{}_{(2)} = 2^{20} - 1$

$B = \underbrace{77 ... 77}_{10 \text{ cifras}}{}_{(8)} = 8^{10} - 1 = (2^3)^{10} - 1 = 2^{30} - 1$

Entonces:
$MCD(A; B) = MCD(2^{20} - 1; 2^{30} - 1) = 2^{MCD(20; 30)} - 1$

Como $MCD(20; 30) = 10$; reemplazando, tenemos:
$MCD(A; B) = 2^{10} - 1$

Nos piden este resultado en base $32 = 2^5$, entonces:
$MCD(A; B) = 2^{10} - 1 = (2^5)^2 - 1 = 32^2 - 1$
$\Rightarrow MCD(A; B) = (31)(31)_{(32)}$

Luego: $31 \times 31 = 961$

6 Calcula el MCD de A y B si $MCD(56A; 72B) = 480$ y $MCD(72A; 56B) = 720$.

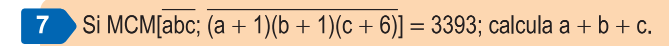
Resolución:

Por propiedad:
$MCD(56A; 72B; 72A; 56B)$
$= MCD[MCD(56A; 72B); MCD(72A; 56B)]$

Además, también se puede escribir:
$MCD(56A; 72B; 72A; 56B)$
$= MCD[MCD(56A; 56B); MCD(72A; 72B)]$

Entonces, igualando se tiene:
$MCD[MCD(56A; 56B); MCD(72A; 72B)]$
$= MCD[MCD(56A; 72B); MCD(72A; 56B)]$

$MCD[56 \times MCD(A; B); 72 \times MCD(A; B)] = MCD(480; 720)$
$MCD(A; B) \times MCD(56; 72) = 240$
$MCD(A; B) \times 8 = 240$
$MCD(A; B) = 30$



7 Si MCM[$\overline{abc}$; $\overline{(a+1)(b+1)(c+6)}$] = 3393; calcula a + b + c.

Resolución:

Sea d = MCD[$\overline{abc}$; $\overline{(a+1)(b+1)(c+6)}$], entonces:

$$\frac{\overline{abc}}{d} = p$$

$$\frac{\overline{(a+1)(b+1)(c+6)}}{d} = q$$

p y q: PESÍ

Además:

$\overline{(a+1)(b+1)(c+6)} = \overline{abc} + 116$

Entonces:

$\underbrace{\overline{(a+1)(b+1)(c+6)}}_{dq} - \underbrace{\overline{abc}}_{dp} = \overline{abc} + 116 - \overline{abc}$

dq − dp = 116

$d(q-p) = 116 = 4 \times 29$ ... (I)

Por dato, se tiene:

MCM[$\overline{abc}$; $\overline{(a+1)(b+1)(c+6)}$] = 3393

$dpq = 9 \times 13 \times 29$ ... (II)

Dividimos (I) entre (II):

$$\frac{q-p}{p \times q} = \frac{4}{13 \times 9} \Rightarrow q = 13;\ p = 9;\ d = 29$$

Luego: $\overline{abc} = 9 \times 29 = 261$

Nos piden:

$a + b + c = 2 + 6 + 1 = 9$

8 Dos números A y B tienen 12 múltiplos comunes menores que 5700. Sabiendo que el MCM de A y B es divisible entre 39, calcula A + B, si se sabe que A y B tienen 9 divisores comunes.

Resolución:

Sean: m = MCM(A; B); d = MCD(A; B)

$\overset{\circ}{m}$: m; 2m; 3m; 4m; ...; 12m; 13m; ...

Del enunciado:

$12m < 5700 \wedge 13m \geq 5700$

Además: $m = 39k$; $k \in \mathbb{Z}^+$

Luego:

$468k < 5700 \wedge 507k \geq 5700$

$k < 12,17 \wedge k \geq 11,24 \Rightarrow k = 12$

También sabemos que:

m = dpq; p y q PESÍ

$2^2 \times 3^2 \times 13 = dpq$

Por dato, MCD(A; B) debe tener 9 divisores, es decir:

$CD[MCD(A; B)] = 9 = (2+1) \times (2+1)$

$\Rightarrow MCD(A; B) = a^2 \times b^2$ (Descomposición canónica)

$d = 2^2 \times 3^2$

$p = 13$

$q = 1$

Por lo tanto:

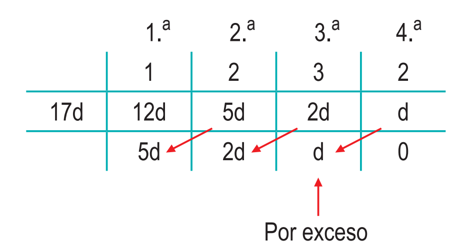
$A + B = 468 + 36 = 504$

9 Al calcular el MCD de los números $\overline{2b(a-2)c}$ y $\overline{1(2a)(a+6)(a+6)}$ mediante el algoritmo de Euclides se obtuvieron como cocientes sucesivos a 1; 2; 3 y 2. Halla el mayor de los números, si la tercera división se hizo por exceso. Da como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Reconstruimos el esquema a partir del MCD = d, retrocediendo.

Veamos:



Como $\overline{2b(a-2)c} > \overline{1(2a)(a+6)(a+6)}$; entonces:

$\overline{2b(a-2)c} = 17d = \overset{\circ}{17}$

$\overline{1(2a)(a+6)(a+6)} = 12d = \overset{\circ}{12}$

El numeral $\overline{1(2a)(a+6)(a+6)}$ es par, para esto la cifra (a + 6) debe ser par, es decir:

$a + 6 = \overset{\circ}{2}$

$a = \overset{\circ}{2}$ → 0 ✗ ($a \geq 2$); 2 ✓; 4 ✗ ($a \leq 3$)

Entonces: $1488 = 12d \Rightarrow d = 124$

Luego:

$\overline{2b(a-2)c} = 17d = 17 \times 124 = 2108$

Nos piden:

$2 + 1 + 0 + 8 = 11$

10 Se trata de vaciar 3 barriles de vino que contienen 210; 300 y 420 L de capacidad, a envases que sean iguales entre sí y que tengan la mayor capacidad posible. ¿Cuántos de estos envases son necesarios para que todos queden llenos sin desperdiciar el vino?

Resolución:

Los envases deben ser iguales y deben tener la mayor capacidad.

Entonces:

Capacidad = MCD(210; 300; 420) = 30

Luego, la capacidad de cada envase es 30 L.

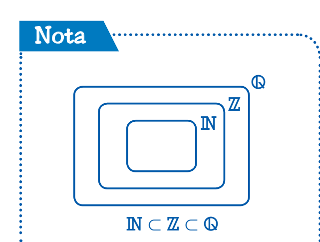
Entonces el número de envases es igual a:

$$\frac{210}{30} + \frac{300}{30} + \frac{420}{30} = 7 + 10 + 14 = 31$$

∴ Son necesarios 31 envases.

CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES (ℚ)

Nota



El conjunto de los números racionales está determinado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

NÚMERO FRACCIONARIO

Son todos aquellos números racionales que no son enteros.

Ejemplos:

- $\frac{7}{23}; \frac{16}{5}; \frac{25}{64}; \frac{19}{4}$ → Son números fraccionarios
- $\frac{-19}{19}; \frac{18}{2}; \frac{24}{6}; \frac{-39}{13}$ → No son números fraccionarios

FRACCIÓN

Son aquellos números fraccionarios cuyos términos son números enteros positivos.

Ejemplos:

- $\frac{5}{6}; \frac{9}{7}; \frac{6}{8}; \frac{21}{45}$ → Son fracciones
- $\frac{-5}{7}; \frac{-13}{-17}; \frac{29}{-2}; \frac{-3}{23}$ → No son fracciones

En general, f es una fracción si: $f = \frac{N}{D};\ N, D \in \mathbb{Z}^+ \ \wedge\ N \neq \overset{\circ}{D}$

Recuerda

En la fracción $f = \frac{N}{D}$; N recibe el nombre de **numerador** y D el de **denominador.**

Clasificación de las fracciones

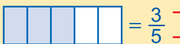
Sea la fracción $\frac{a}{b}$.

1. Por la comparación de su valor respecto a la unidad

Propia	Impropia
Si $\frac{a}{b} < 1$, entonces a < b. Por ejemplo: $\frac{3}{15}; \frac{5}{11}; \frac{9}{13}; \frac{6}{25}$	Si $\frac{a}{b} > 1$, entonces a > b. Por ejemplo: $\frac{29}{3}; \frac{120}{27}; \frac{56}{9}; \frac{68}{15}$

Observación

Gráficamente:



$= \frac{3}{5}$ → Parte, → Todo

- El denominador (5) indica en cuántas partes se divide el todo (unidad de referencia).
- El numerador (3) representa las partes del todo que se toman o se observan.

2. Por su denominador

Decimal	Ordinaria
Si $b = 10^k;\ k \in \mathbb{Z}^+$. Por ejemplo: $\frac{3}{10}; \frac{1}{10^3}; \frac{7}{10^4}; \frac{9}{10^5}$	Si $b \neq 10^k;\ k \in \mathbb{Z}^+$. Por ejemplo: $\frac{6}{11}; \frac{16}{21}; \frac{35}{93}; \frac{7}{33}$

3. Por la cantidad de divisores comunes de sus términos

Irreductible	Reductible
Cuando a y b son PESÍ. Por ejemplo: $\frac{1}{5}; \frac{3}{7}; \frac{20}{9}; \frac{49}{16}$	Cuando a y b no son PESÍ. Por ejemplo: $\frac{12}{15}; \frac{22}{16}; \frac{6}{18}; \frac{49}{14}$

Observación

La fracción $f = \frac{N}{D}$ es irreductible si y solo si MCD(N; D) = 1.

4. Por grupo de fracciones

Homogéneas	Heterogéneas
Todas las fracciones tienen el mismo denominador. Por ejemplo: $\frac{5}{26}; \frac{3}{26}$ y $\frac{19}{26}$ son homogéneas	Al menos una de las fracciones tiene un denominador distinto de las demás. Por ejemplo: $\frac{2}{17}; \frac{14}{18}$ y $\frac{7}{15}$ son heterogéneas

OPERACIONES CON FRACCIONES

Adición y sustracción

- $\frac{17}{20}+\frac{6}{20}-\frac{9}{20}=\frac{17+6-9}{20}=\frac{14}{20}$ → Fracciones homogéneas

- $\underbrace{\frac{3}{10}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}}_{\text{MCM}(10;\,6;\,8)\,=\,120}=\frac{3\times(120\div10)+5\times(120\div6)-7\times(120\div8)}{120}=\frac{36+100-105}{120}=\frac{131}{120}$ → Fracciones heterogéneas

- $5+\frac{11}{21}=\frac{5\times21+11}{21}=\frac{116}{21}$

Multiplicación

- $\frac{9}{16}\times\frac{5}{7}=\frac{9\times5}{16\times7}=\frac{42}{112}$
- $12\times\frac{15}{37}=\frac{12\times15}{37}=\frac{180}{37}$

División

- $\frac{5}{7}\div\frac{3}{8}=\frac{5}{7}\times\frac{8}{3}=\frac{5\times8}{7\times3}=\frac{40}{21}$

  Fracción inversa

- $\frac{16}{35}\div9=\frac{16}{35}\times\frac{1}{9}=\frac{16\times1}{35\times9}=\frac{16}{315}$

  Inversa

Observación

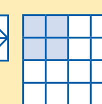
Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si expresan la misma porción de la unidad con términos distintos.

Se denota: $\frac{a}{b}<>\frac{c}{d}$

Ejemplo:

$\frac{1}{4}<>\frac{2}{8}<>\frac{4}{16}$



COMPARACIÓN DE FRACCIONES

1. Si las fracciones son homogéneas, será mayor la que tenga mayor numerador.

   Ejemplo:

   Dadas las fracciones $\frac{7}{19};\frac{17}{19}$ y $\frac{5}{19}$; como $5<7<17$, entonces: $\frac{5}{19}<\frac{7}{19}<\frac{17}{19}$

2. Si las fracciones son heterogéneas, podemos emplear dos procedimientos:

   Dando común denominador. Se halla el MCM de los denominadores y el nuevo numerador se hallará multiplicando el numerador inicial por el cociente del MCM entre el denominador inicial. Luego, se procederá como en el caso de fracciones homogéneas.

   Ejemplo:
   Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{5}{8};\frac{9}{14};\frac{7}{12}$

   Resolución:

   Hallamos MCM(8; 14; 12) = 168; entonces: $\frac{5\times(168\div8)}{168};\frac{9\times(168\div14)}{168};\frac{7\times(168\div12)}{168}$

   Luego: $\frac{105}{168};\frac{108}{168};\frac{98}{168}$

   Se procede en el caso de fracciones homogéneas: $98<105<108\Rightarrow\frac{98}{168}<\frac{105}{168}<\frac{108}{168}$

   Por lo tanto: $\frac{7}{12}<\frac{5}{8}<\frac{9}{14}$

   Dando común numerador. Se halla el MCM de los numeradores y el nuevo denominador se hallará multiplicando el denominador inicial por el cociente de dividir el MCM entre el numerador inicial. La mayor fracción será la que tenga menor numerador y viceversa.

   Ejemplo:
   Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{10}{7};\frac{12}{5};\frac{15}{8}$

   Resolución:
   Hallamos MCM(10; 12; 15) = 60; entonces:

   $$\frac{60}{7\times(60\div10)};\frac{60}{5\times(60\div12)};\frac{60}{8\times(60\div15)}$$

   Luego: $\frac{60}{42};\frac{60}{25};\frac{60}{32}$

   Como $42>32>25$; se tiene: $\frac{60}{42}<\frac{60}{32}<\frac{60}{25}\Rightarrow\frac{10}{7}<\frac{15}{8}<\frac{12}{5}$

Atención

Simplificación de fracciones

Para simplificar una fracción se divide al numerador y denominador por una misma cantidad que los divida exactamente.

Ejemplo:

$\frac{60}{180}\xrightarrow{\div2}\frac{30}{90}\xrightarrow{\div2}\frac{15}{45}\xrightarrow{\div3}\frac{5}{15}\xrightarrow{\div5}\frac{1}{3}$

Nota

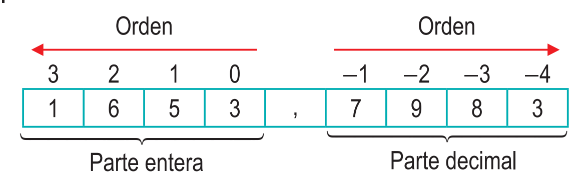
Número mixto

Un número mixto está formado por un número entero positivo y una fracción propia.

Ejemplos: $7\frac{1}{2}$; $9\frac{3}{7}$; $5\frac{4}{10}$

NÚMEROS DECIMALES

Son aquellos números que resultan de dividir los términos de una fracción.
Sea el numeral 1653,7983.



Clasificación de los números decimales

Número decimal exacto

Son los números decimales cuya parte decimal tiene un número finito de cifras. Se obtiene de una fracción irreductible cuyo denominador tiene como divisores primos solo a 2 y/o 5.

Fracción generatriz: $0,\overline{abcd} = \dfrac{\overline{abcd}}{10\,000}$

Ejemplos:

- $\dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{2^3} = 0,375$
- $\dfrac{7}{20} = \dfrac{7}{2^2 \times 5} = 0,35$

Número decimal inexacto

Son los números decimales que tienen un número ilimitado de cifras decimales.

- **Número decimal inexacto periódico puro.** Es aquel en cuya parte decimal aparece una o un bloque de cifras denominado **periodo**, el cual se repite indefinidamente a partir de la coma decimal.

  Ejemplos:
  - 0,777...; el cual se representa así: $0,\widehat{7}$, donde el periodo es 7.
  - 0,121212...; el cual se representa así: $0,\widehat{12}$, donde el periodo es 12.

  Estos números son generados por una fracción irreductible cuyo denominador no admite como divisores primos a 2 y/o 5.

  Fracción generatriz: $0,\widehat{abcde} = \dfrac{\overline{abcde}}{99\,999}$

  Ejemplos:
  - $0,\widehat{7} = \dfrac{7}{9} = \dfrac{7}{3^2}$
  - $0,\widehat{12} = \dfrac{12}{99} = \dfrac{4}{3 \times 11}$
  - $0,\widehat{215} = \dfrac{215}{3^3 \times 37}$

- **Número decimal inexacto periódico mixto.** Es aquel cuyo periodo empieza después de una cifra o un bloque de cifras a partir de la coma decimal. A esta cifra o bloque de cifras se le denomina **parte no periódica**.

  Ejemplos:
  - 0,61212...; el cual se representa así: $0,6\widehat{12}$, donde el periodo es 12 y la parte no periódica es 6.
  - 0,31592592...; el cual se representa así: $0,31\widehat{592}$, donde el periodo es 592 y la parte no periódica es 31.

  Estos números son generados por una fracción irreductible cuyo denominador tiene como divisores primos a 2 y/o 5, además de otros factores primos.

  Fracción generatriz: $0,\overline{ab}\widehat{xyz} = \dfrac{\overline{abxyz} - \overline{ab}}{99\,900}$

  Ejemplos:
  - $0,6\widehat{12} = \dfrac{612 - 6}{990} = \dfrac{606}{990} = \dfrac{101}{3 \times 5 \times 11}$
  - $0,31\widehat{592} = \dfrac{31\,592 - 31}{99\,900} = \dfrac{31\,561}{99\,900} = \dfrac{853}{2^2 \times 3^3 \times 5^2}$

  Cuando se trabaja con números decimales, es necesario tener en cuenta la descomposición polinómica de los números formados por cifras nueve.

$$\begin{aligned}
9 &= 3^2 \\
99 &= 3^2 \times 11 \\
999 &= 3^3 \times 37 \\
9999 &= 3^2 \times 11 \times 101 \\
99999 &= 3^2 \times 41 \times 271 \\
999999 &= 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \\
9999999 &= 3^2 \times 239 \times 4649 \\
99999999 &= 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137
\end{aligned}$$

Nota

Sean las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

- Si $a \times d < b \times c \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
- Si $a \times d > b \times c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Observación

Sea $f = \frac{N}{D}$ una fracción irreductible. A partir de f se podrán obtener fracciones equivalentes a ella, multiplicando al numerador y al denominador por una misma cantidad.

Ejemplo:

$\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = \frac{21}{9} = \frac{28}{12} = \frac{35}{15} = ... = \frac{7k}{3k}; k \in \mathbb{Z}^+$

Observación

- Para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto, primero escribimos en el numerador toda la parte decimal; luego, en el denominador escribimos la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal. Finalmente, si la fracción todavía no es irreductible, se procederá a simplificar.
- Para hallar la fracción generatriz de un número decimal inexacto periódico puro, primero se escribe en el numerador de la fracción el periodo; luego, en el denominador de la fracción escribimos tantos nueves como cifras tenga el periodo. Finalmente, si la fracción aún no es irreductible, se procederá a simplificar.
- Para hallar la fracción generatriz de un número decimal inexacto periódico mixto, en el numerador se escribe la parte no periódica seguida de la parte periódica menos la parte no periódica; luego, en el denominador, se escribe tantos nueves como cifras tenga el periodo seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica. Finalmente, si aún la fracción no es irreductible, se procederá a simplificar.

Problemas resueltos

1 Halla la fracción generatriz de $0,05\widehat{83}$.

Resolución:

$0,05\widehat{83} = \dfrac{583-5}{9900} \Rightarrow 0,05\widehat{83} = \dfrac{578}{9900}$

$\therefore 0,05\widehat{83} = \dfrac{289}{4950}$

2 Efectúa:

$$P = \frac{\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{5}+\frac{1}{125}\right)\left(\sqrt{1,75+2,75}\right)}{0,7\widehat{32}+0,7\widehat{59}}$$

Resolución:

$$P = \frac{\left(\frac{5}{125}+\frac{25}{125}+\frac{1}{125}\right)\sqrt{4,5}}{\frac{732-7}{990}+\frac{759-7}{990}}$$

$$P = \frac{\left(\frac{31}{125}\right)\sqrt{\frac{9}{2}}}{\frac{725}{990}+\frac{752}{990}} \Rightarrow P = \frac{\left(\frac{31}{125}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1477}{990}} = \frac{\frac{93\sqrt{2}}{250}}{\frac{1477}{990}}$$

$P = \dfrac{92\ 070\sqrt{2}}{369\ 250} \qquad \therefore P = \dfrac{9207\sqrt{2}}{36\ 925}$

3 Calcula:

$$L = \frac{0,4+0,5+0,6+...+1,9}{0,01+0,04+0,09+0,16}$$

Resolución:

Analizando el numerador:

$0,4+0,5+0,6+...+1,9$

$= 10^{-1}\times(4+5+6+...+19)$

$= 10^{-1}\times\left[\dfrac{19(20)}{2}-\dfrac{3(4)}{2}\right]$

$= 10^{-1}\times[190-6] = 18,4$

Analizando el denominador:

$10^{-2}\times[1+4+9+...+16]$

$= 10^{-2}\times[30]$

$= 0,3$

Finalmente: $L = \dfrac{18,4}{0,3} = 61,\hat{3}$

4 Simplifica:

$$x = \frac{0,\hat{2}+0,\hat{3}+...+0,\hat{7}}{0,3\hat{2}+0,4\hat{3}+...+0,8\hat{7}}$$

Resolución:

$$x = \frac{\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{6}{9}+\frac{7}{9}}{\frac{29}{90}+\frac{39}{90}+\frac{49}{90}+\frac{59}{90}+\frac{69}{90}+\frac{79}{90}}$$

$$x = \frac{\frac{27}{9}}{\frac{324}{90}} = \frac{27\times 90}{9\times 324} = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 0,8\hat{3}$$

5 El denominador de una fracción excede al numerador en una unidad. Si se agrega a ambos miembros de la fracción una unidad, la nueva fracción excede a la original en $\frac{1}{72}$. ¿Cuál es la fracción original?

Resolución:

Sea la fracción original: $\dfrac{n}{n+1}$

Del enunciado: $\dfrac{n+1}{n+1+1} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{72}$

$$\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{72}$$

$$\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{72}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{72}$$

$$\underbrace{(n+1)}_{8}\underbrace{(n+2)}_{9} = 72 \Rightarrow n = 7$$

$\therefore \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{7}{8}$

6 ¿Cuál es la fracción irreductible que resulta triplicada si se agrega a sus dos términos su denominador?

Resolución:

Sea la fracción: $\dfrac{a}{b}$

Del enunciado: $\dfrac{a+b}{b+b} = 3\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$(a+b)b = 3a(b+b)$

$ab+b^2 = 6ab$

$b^2 = 5ab \Rightarrow b = 5a$

$\therefore$ La fracción irreductible es: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{5}$

7 Halla el número de fracciones equivalentes a 0,4 cuyos numeradores están entre 15 y 35, y los denominadores entre 50 y 75.

Resolución:

Sea la fracción: $\dfrac{a}{b} = 0,4 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{2k}{5k}$

Por dato:

$15 < a < 35$

$15 < 2k < 35$

$7,5 < k < 17,5$

k: 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17

Denominador:

$50 < b < 75$

$50 < 5k < 75$

$10 < k < 15$

$k = 11; 12; 13; 14$

Luego, los valores de k son: $k = 11; 12; 13; 14$

$\therefore$ Existen 4 fracciones.

8 Halla una fracción equivalente a 17/48, tal que la suma de sus términos sea $\overset{\circ}{12}$ y $\overset{\circ}{18}$; su numerador múltiplo de 5 y además posea los menores términos.

Resolución:

$\frac{a}{b} = \frac{17n}{48n}$; MCM(12; 18) = 36

$a + b = 65n = \overset{\circ}{36} \Rightarrow n = \overset{\circ}{36}$ ... (1)

$a = 17n = \overset{\circ}{5} \Rightarrow n = \overset{\circ}{5}$ ... (2)

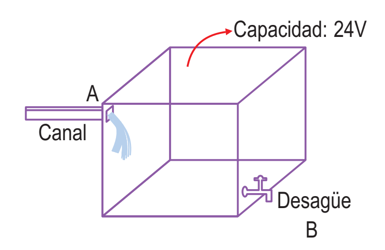
De (1) y (2): $n = \overset{\circ}{\overline{MCM(36; 5)}} = \overset{\circ}{180}$

Para que tenga los menores términos: $n = 180$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{17 \times 180}{48 \times 180} = \frac{3060}{8640}$

9 Un canal llena un estanque en 4 horas y un desagüe lo vacía en 6 horas. ¿En qué tiempo se llenará el estanque si se abre el desagüe una hora después de abrir el canal de entrada?

Resolución:



El canal A lo llena en 4 horas, entonces en 1 hora llena:

$\frac{1}{4}(24V) = 6V$

El desagüe B lo vacía en 6 horas, entonces en 1 hora vacía:

$\frac{1}{6}(24V) = 4V$

Del enunciado, el desagüe se habre una hora después de abrir el canal A, entonces en 1 hora ambos llenan: $6V - 4V = 2V$

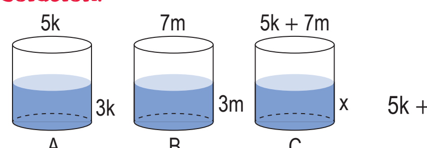
Como en la primera hora solo se habre el canal A, entonces la capacidad que se llenó fue 6V y lo que falta $24V - 6V = 18V$, se llenará en:

$\frac{18V}{2V} = 9$ horas

$\therefore$ El estanque se llenará en: $9 + 1 = 10$ horas

10 Se repartió en partes iguales, cierta cantidad de gasolina en tres depósitos. El primero se llena hasta sus 2/5 y el segundo hasta los 4/7. ¿Qué fracción del tercer depósito se llenará si su capacidad es la suma de las capacidades de los dos primeros?

Resolución:



$5k + 4m = \text{Total}$

Piden: $\frac{x}{5k + 7m}$

Donde: $2k = 4m = x \Rightarrow k = 2m$

$\frac{4m}{5k + 7m} = \frac{4m}{10m + 7m} = \frac{4m}{17m} = \frac{4}{17}$

11 Si al numerador de una fracción se le suma 3 y al denominador se le suma 1 se obtiene 2. Pero si al numerador se le resta 2 y al denominador se le resta también 2, se obtiene 2,5. Indica la expresión decimal de la fracción.

Resolución:

Sea $\frac{a}{b}$ la fracción:

$\frac{a+3}{b+1} = 2 \qquad a + 3 = 2 \times (b + 1)$

$a = 2b - 1$ ...(1)

$\frac{a-2}{b-2} = \frac{5}{2} \qquad 2a - 4 = 5b - 10$

$2a = 5b - 6$ ...(2)

Reemplazando: (1) en (2)

$2 \times (2b - 1) = 5b - 6$

$4b - 2 = 5b - 6$

$b = 4 \Rightarrow a = 7$

Piden: $\frac{a}{b} = \frac{7}{4} = 1{,}75$

12 Encuentra el menor número racional entre 2/3 y 13/15; cuya distancia al primero sea la mitad de la distancia al segundo.

Resolución:

Ubicamos las fracciones en la recta numérica:

x   2x

$\frac{2}{3}$ a $\frac{13}{15}$

Luego: $a - \frac{2}{3} = x \quad \wedge \quad \frac{13}{15} - a = 2x$

Reemplazando obtenemos: $\frac{13}{15} - a = 2\left(a - \frac{2}{3}\right)$

$\frac{13 - 15a}{15} = 2\left(\frac{3a - 2}{3}\right)$

$39 - 45a = 90a - 60$

$135a = 99 \Rightarrow a = \frac{99}{135}$

Simplificando obtenemos: $a = \frac{11}{15}$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN $\mathbb{Z}^+$

POTENCIACIÓN

Es una forma abreviada de la multiplicación, que consiste en multiplicar un mismo número (base) tantas veces como lo indica otro (exponente).

$$P = \underbrace{B \times B \times ... \times B}_{n \text{ veces}} = B^n$$

Donde:
B: base ($B \in \mathbb{Z}^+$)
n: exponente ($n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 1$)
P: potencia perfecta de grado n

Teorema fundamental

Sea N un número entero positivo. Para que N sea una potencia perfecta de grado n, los exponentes de los factores primos de su descomposición canónica deben ser múltiplos de n.

Observación

Un número entero positivo será un cuadrado perfecto si y solo si tiene una cantidad impar de divisores.

Ejemplo:
$36 = 2^2 \times 3^2$

Entonces:
$CD(36) = (2 + 1) \times (2 + 1) = 9$

CASOS PARTICULARES

Potencia perfecta de grado 2 o cuadrado perfecto

Un número entero positivo es un cuadrado perfecto o potencia perfecta de grado 2, si los exponentes de sus factores primos de su descomposición canónica son pares.

Ejemplos:
- $4 = 2^2$
- $9 = 3^2$
- $36 = 2^2 \times 3^2$

Potencia perfecta de grado 3 o cubo perfecto

Un número entero positivo es un cubo perfecto o potencia perfecta de grado 3, si los exponentes de sus factores primos de su descomposición canónica son múltiplos de 3.

Ejemplos:
- $8 = 2^3$
- $27 = 3^3$
- $216 = 2^3 \times 3^3$

Propiedad

- Si un número cuadrado perfecto es múltiplo de un número primo, entonces será múltiplo de dicho número primo elevado al cuadrado.
- Si un número cubo perfecto es múltiplo de un número primo, entonces será múltiplo de dicho número primo elevado al cubo.

CRITERIOS DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS

Según su última cifra

N	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9	...0
N^2	...1	...4	...9	...6	...5	...6	...9	...4	...1	...0
N^3	...1	...8	...7	...4	...5	...6	...3	...2	...9	...0

Se observa:
- Un cuadrado perfecto no puede terminar en las cifras 2; 3; 7 ó 8.
- Un cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra.

Por la terminación en ceros

Para cuadrados perfectos	Para cubos perfectos
Un número que termina en cierta cantidad de ceros, es un cuadrado perfecto si dicha cantidad de cifras cero es múltiplo de dos y el numeral de cifras significativas que queda a la izquierda es un cuadrado perfecto.	Un número que termina en cierta cantidad de ceros, es un cubo perfecto si dicha cantidad de cifras cero es múltiplo de tres y el numeral de cifras significativas que queda a la izquierda es un cubo perfecto.

Por la terminación en cifra 5

Para cuadrados perfectos	Para cubos perfectos
Un número que termina en 5, al ser elevado al cuadrado termina en 25 y la cifra de orden 2 puede ser 0; 2 ó 6.	Un número que termina en 5, al ser elevado al cubo termina en 5 y la cifra de orden 1 puede ser 2 ó 7.

Nota

Ejemplo 1:

$\overline{mn2}$ no puede ser un cuadrado perfecto pero sí puede ser un cubo perfecto.

Ejemplo 2:
- $250\,000 = 5^2 \times 10^4$
- $6400 = 8^2 \times 10^2$
- $64\,000 = 4^3 \times 10^3$
- $343\,000 = 7^3 \times 10^3$
- $2300 = 23 \times 10^2$, no es un cuadrado perfecto ya que 23 no es un cuadrado perfecto.

Por criterios de divisibilidad

Para cuadrados perfectos	Para cubos perfectos
Un cuadrado perfecto puede ser: • $\overset{\circ}{4}$ ó $\overset{\circ}{4}+1$ • $\overset{\circ}{9}$; $\overset{\circ}{9}+1$; $\overset{\circ}{9}+4$ ó $\overset{\circ}{9}+7$	Un cubo perfecto puede ser: • $\overset{\circ}{4}-1$; $\overset{\circ}{4}$ ó $\overset{\circ}{4}+1$ • $\overset{\circ}{9}-1$; $\overset{\circ}{9}$ ó $\overset{\circ}{9}+1$

Nota

$\overline{N5}^2 = \overline{[N(N+1)]25}$

Ejemplos:

- $45^2 = 2025$ ($20 = 4 \times 5$, $25 = 5^2$)
- $115^2 = 132\,25$ ($132 = 11 \times 12$, $25 = 5^2$)

RADICACIÓN

Es una operación matemática inversa a la potenciación que consiste en que dados dos números llamados índice y radicando se calcula un tercer número llamado raíz, donde este último elevado al índice produce al radicando.

$$\sqrt[n]{K} = R \Leftrightarrow K = R^n$$

Donde:
K: radicando ($K \in \mathbb{Z}^+$)
n: índice ($n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n > 1$)
R: raíz enésima

Observación

Si $\overline{...a5}^3 = \overline{...b5}$, entonces:

- b = 2, si a es par.
- b = 7, si a es impar.

CASOS PARTICULARES

Raíz cuadrada entera (índice 2)

Para extraer la raíz cuadrada de un número entero positivo mayor que 100, se debe proceder de la siguiente manera:

1. Se forman periodos de dos cifras empezando por la derecha.
2. Se halla la raíz cuadrada entera del primer periodo (de izquierda a derecha), la cual tendrá una sola cifra; ella será la primera cifra de la raíz.
3. Se resta del primer periodo, el cuadrado de su raíz cuadrada entera.
4. A la derecha de la diferencia se baja el periodo siguiente.
5. Al número formado se separa la cifra de las unidades; esta cantidad se divide entre el doble de la primera cifra de la raíz.
6. El cociente entero obtenido se escribe a la derecha del divisor, dicho numeral formado se multiplica por el referido cociente entero, este producto se resta del numeral formado por el primer residuo y el segundo periodo.
7. Si la resta puede efectuarse, es decir, si la diferencia es un número natural, la cifra que sirvió de cociente será la segunda cifra de la raíz. Pero si la resta no puede efectuarse, es decir, la diferencia no es un número natural, se disminuye en una unidad la cifra que se usó de cociente, sometiéndose a análogas comprobaciones hasta obtener la cifra correcta de la raíz.
8. A la derecha del resto se bajará el periodo siguiente y así sucesivamente hasta bajar el último periodo y hallar la última cifra de la raíz.

Atención

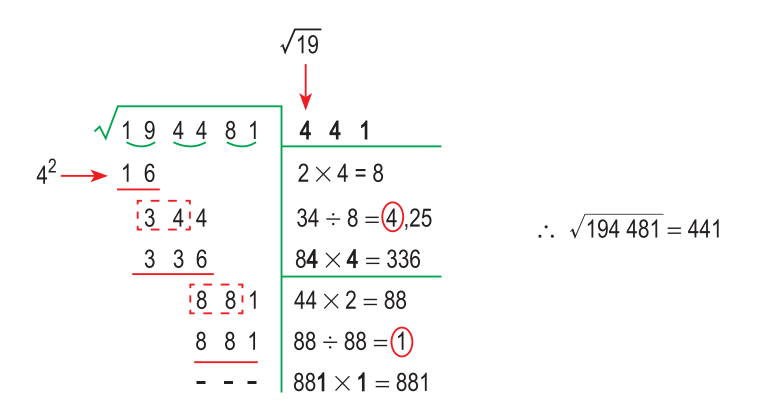
Ejemplo 3:

- $121 = 11^2$: $\overset{\circ}{4}+1$; $\overset{\circ}{9}+4$
- $1296 = 36^2$: $\overset{\circ}{4}$; $\overset{\circ}{9}$
- $169 = 13^2$: $\overset{\circ}{4}+1$; $\overset{\circ}{9}+7$

Ejemplo 4:

- $729 = 9^3$: $\overset{\circ}{4}+1$; $\overset{\circ}{9}$
- $4096 = 16^3$: $\overset{\circ}{4}$; $\overset{\circ}{9}+1$
- $1331 = 11^3$: $\overset{\circ}{4}-1$; $\overset{\circ}{9}-1$

Ejemplo:



$\therefore \sqrt{194\,481} = 441$

Raíz cuadrada exacta

$\sqrt{N}\ \underline{|K}$, resto 0 $\Rightarrow N = K^2$

Si un número tiene raíz cuadrada exacta, entonces dicho número es un cuadrado perfecto.

Raíz cuadrada inexacta

Por defecto	Por exceso
$\sqrt{N}$ | K ; r_d ; $N = K^2 + r_d$	$\sqrt{N}$ | K + 1 ; r_e ; $N = (K+1)^2 - r_e$

Observación

Propiedades
- $r_{mín.} = 1$
- $r_{máx.} = 2K$
- $r_d + r_e = 2K + 1$

Raíz cúbica entera (índice 3)

Para extraer la raíz cúbica de un número entero positivo mayor que 1000, se debe proceder de la siguiente manera:

1. Se forman periodos de tres cifras empezando por la derecha.
2. Se halla la raíz cúbica entera del primer periodo (contando de izquierda a derecha), la cual tendrá una sola cifra; ella será la primera cifra de la raíz.
3. Se resta del primer periodo, el cubo de su raíz cúbica entera.
4. A la derecha de la diferencia se baja el periodo siguiente.
5. Al número formado se separan las cifras de las decenas y las unidades; la cantidad formada se divide entre el triple de la primera cifra de la raíz elevada al cuadrado.
6. Una vez obtenido el cociente entero, se suma el triple de dicho cociente multiplicado por el cuadrado del producto de la(s) cifra(s) de la raíz multiplicado(s) por diez, más el triple del cociente entero elevado al cuadrado por el producto de la(s) cifra(s) de la raíz multiplicado(s) por diez, más el cubo del cociente entero obtenido en el paso anterior; este resultado se resta del número formado por el primer residuo y el segundo periodo.
7. Si la resta puede efectuarse, es decir, si la diferencia es un número natural, el cociente entero obtenido en el paso 5, será la segunda cifra de la raíz. Pero si la resta no puede efectuarse, es decir, la diferencia no es un número natural, se disminuye en una unidad la cifra que se usó de cociente, sometiéndose a análogas comprobaciones hasta obtener la cifra correcta de la raíz.
8. A la derecha del resto se bajará el periodo siguiente y así sucesivamente hasta bajar el último periodo y hallar la última cifra de la raíz.

Nota

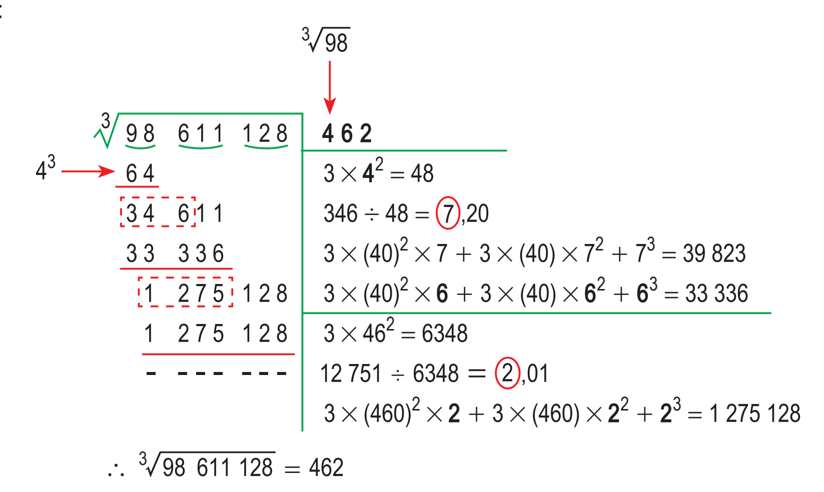
Teorema
Todo número entero positivo que no es un cuadrado perfecto, está comprendido entre dos cuadrados perfectos consecutivos.

Ejemplo: $5^2 < 28 < 6^2$

Recuerda

Si en el paso 5 se obtiene como cociente un número de dos cifras, entonces la primera cifra de la raíz será el 9, y si esta cifra sigue excediendo, se le restará una unidad hasta encontrar el valor adecuado.

Ejemplo:



$\therefore\ \sqrt[3]{98\ 611\ 128} = 462$

Observación

A partir del paso 4, el procedimiento se repetirá de manera análoga para hallar las demás cifras de la raíz.

Raíz cúbica exacta

$\sqrt[3]{N}$ | K ; 0 $\Rightarrow N = K^3$

Si un número tiene raíz cúbica exacta, entonces dicho número es un cubo perfecto.

Atención

Teorema
Todo número entero positivo que no es un cubo perfecto, está comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.

Ejemplo: $8^3 < 602 < 9^3$

Raíz cúbica inexacta

Por defecto	Por exceso
$\sqrt[3]{N}$ | K ; r_d ; $N = K^3 + r_d$	$\sqrt[3]{N}$ | K + 1 ; r_e ; $N = (K+1)^3 - r_e$

Nota

Propiedades
- $r_{mín.} = 1$
- $r_{máx.} = 3K(K + 1)$
- $r_d + r_e = 3K(K + 1) + 1$

Problemas resueltos

1 ¿Cuál es el menor número por el cual hay que multiplicar a 5250 para que el producto sea un cuadrado perfecto?

Resolución:

$5250 \times p = K^2$ (mínimo)

$2 \times 3 \times 5^3 \times 7 \times \underbrace{p}_{2 \times 3 \times 5 \times 7} = K^2$

Entonces, el menor número por el cual hay que multiplicar a 5250 para que el producto sea un cuadrado perfecto es:

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2100$$

2 Determina el menor número, tal que al restarle sus 5/8, se obtiene un cubo perfecto.

Resolución:

Sea N el número, del enunciado:

$N - \frac{5}{8}N = K^3$ (mínimo)

$\frac{3}{8}\overbrace{N}^{3^2 \times 2^3} = K^3 \Rightarrow \frac{3}{8}(3^2 \times 2^3) = K^3$

$3^3 = K^3$

Luego, el menor número es $N = 3^2 \times 2^3 = 72$.

3 Si el numeral $\overline{b(b+1)(b+2)(3b)(b+3)}$ es un cuadrado perfecto, calcula la suma de cifras de la raíz cuadrada.

Resolución:

Del enunciado:

$K^2 = \overline{b(b+1)(b+2)(3b)(b+3)}$

b	b + 3	
1	4	
2	5	✗ ($K^2 = ...65$)
3	6	

Como b puede ser 1 ó 3, entonces:

$K^2 = \begin{cases} ...4 \\ ...6 \end{cases} \Rightarrow K^2 = \overset{\circ}{2}$

Luego: $K^2 = \overset{\circ}{4}$

Si $b = 1$: $K^2 = 12\,334 \neq \overset{\circ}{4}$

Si $b = 3$: $K^2 = 34\,596 = \overset{\circ}{4}$

Hallamos la raíz cuadrada:

$\sqrt{3\,45\,96}$	1 8 6
1	$2 \times 1 = 2$
2 4 5	$24 \div 2 = 12$
2 2 4	$29 \times 9 = 261$
2 1 9 6	$28 \times 8 = 224$
2 1 9 6	$2 \times 18 = 36$
- - - -	$219 \div 36 = 6{,}08$
	$366 \times 6 = 2196$

Entonces: $34\,596 = 186^2$

Piden:

$1 + 8 + 6 = 15$

4 Si el numeral $\overline{aabb}$ es un cuadrado perfecto, halla $a^2 - b^2 + 5$.

Resolución:

Se observa que:

$\overline{aabb} = \overset{\circ}{11}$

Como $\overline{aabb} = K^2$, entonces:

$\overline{aabb} = \overset{\circ}{121} = 121p^2$; $p \in \mathbb{Z}^+$

Además:

$1100 \leq 121p^2 \leq 9999$

$9{,}09 \leq p^2 \leq 82{,}64$

$3{,}01 \leq p \leq 9{,}09$

p: 4; 5; 6; 7; 8; 9

Luego:

$121 \times 4^2 = 1936$ ✗

$121 \times 5^2 = 3025$ ✗

$121 \times 6^2 = 4356$ ✗

$121 \times 7^2 = 5929$ ✗

$121 \times 8^2 = 7744$ ✓

$121 \times 9^2 = 9801$ ✗

Piden: $a^2 - b^2 + 5 = 7^2 - 4^2 + 5 = 38$

5 Si el numeral $\overline{mnp6qr}$ tiene una cantidad impar de divisores y es múltiplo de 110, calcula $\overline{mq}_{(p)} + \overline{nr}_{(p+2)}$; si además: $m + n + p + q + r = 12$

Resolución:

Del enunciado, como $\overline{mnp6qr}$ tiene una cantidad impar de divisores, entonces es un cuadrado perfecto, luego:

$K^2 = \overline{mnp6qr} = \overset{\circ}{10} \Rightarrow r = q = 0$

También:

$m + n + p + 6 = 18 = \overset{\circ}{3} \Rightarrow \overline{mnp600} = \overset{\circ}{3}$

Se tiene:

$\overline{mnp600} = \begin{cases} \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{11} \end{cases} \Rightarrow \overline{mnp600} = \begin{cases} \overset{\circ}{3^2} = \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{11^2} = \overset{\circ}{121} \end{cases}$

Luego: $\overline{mnp6} = N^2 = \overset{\circ}{\text{MCM}(9; 121)} = \overset{\circ}{1089}$

Además:

$\overline{mnp6} = \overset{\circ}{2} = \overset{\circ}{4} \Rightarrow \overline{mnp6} = \overset{\circ}{\text{MCM}(4; 1089)} = \overset{\circ}{4356}$ — 4356 ✓ ; 8712 ✗

$\overline{mnp6} = 4356$

Piden:

$\overline{mq}_{(p)} + \overline{nr}_{(p+2)} = 40_{(5)} + 30_{(7)} = 20 + 21 = 41$

6 Si $\overline{mnpqr00} = K^3$ ($K \in \mathbb{N}$), además es múltiplo de 3 y 7, calcula: $m + n + p + q + r$

Resolución:

Del enunciado:

$\overline{mnpqr00} = K^3 \begin{cases} \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{7} \end{cases} \Rightarrow \overline{mnpqr00} = K^3 \begin{cases} \overset{\circ}{3^3} = \overset{\circ}{27} \\ \overset{\circ}{7^3} = \overset{\circ}{343} \end{cases}$

$\overline{mnpqr00} = \overset{\circ}{9261}$

Además, como dicho numeral es un cubo perfecto, este debe terminar en una cantidad de ceros $\overset{\circ}{3}$.

Entonces: r = 0

$K^3 = \overline{mnpq000}$

Si: n = p = q = 0 $\Rightarrow K^3 = \overline{m000000} \neq \overset{\circ}{9261}$

Luego: $\overline{mnpq} = M^3 = \overset{\circ}{9261}$

$\Rightarrow \overline{mnpq} = 9261$

Piden: m + n + p + q + r = 9 + 2 + 6 + 1 + 0 = 18

7 Si $\overline{2xyz1} = K^3$, calcula $\overline{xy} + \overline{yz}$.

Resolución:

Se tiene:

$20\,001 \leq \overline{2xyz1} \leq 29\,991$

$20\,001 \leq K^3 \leq 29\,991$

$27{,}14 \leq K \leq 31{,}07$

K: 28; 29; 30; 31

$\Rightarrow K^3 = 31^3 = 29\,791 = \overline{2xyz1}$

Piden: $\overline{xy} + \overline{yz} = 97 + 79 = 176$

8 Halla la suma de cifras de un número de 3 dígitos tal que al calcular su raíz cuadrada y raíz cúbica se obtienen residuos máximos.

Resolución:

Sea el número: $N = \overline{abc}$

Del enunciado:

$N = \begin{cases} K_1^2 + 2K_1 \\ K_2^3 + 3K_2(K_2 + 1) \end{cases} \Rightarrow N + 1 = \begin{cases} (K_1 + 1)^2 \\ (K_2 + 1)^3 \end{cases}$

Luego: $N + 1 = K^6$

Sabemos que:

$100 \leq \overline{abc} \leq 999$

$101 \leq \overline{abc} + 1 \leq 1000$

$101 \leq K^6 \leq 1000$

$2{,}16 \leq K \leq 3{,}16 \Rightarrow K = 3$

Por lo tanto: $N = 3^6 - 1$

$\overline{abc} = 728$

Piden: a + b + c = 7 + 2 + 8 = 17

9 ¿Cuántos números de 4 cifras que terminan en la cifra 7 existen, tal que al extraerle su raíz cuadrada por exceso se obtiene 3 como residuo?

Resolución:

Sea el número: $N = \overline{abc7}$

Del enunciado: $N = \overline{abc7} = (K + 1)^2 - 3$

Sabemos:

$1007 \leq \overline{abc7} \leq 9997$

$1007 \leq (K + 1)^2 - 3 \leq 9997$

$1010 \leq (K + 1)^2 \leq 10\,000$

$31{,}78 \leq K + 1 \leq 100$ ... (I)

Además:

$(K + 1)^2 = \overline{abc7} + 3 = ...00 \Rightarrow K + 1 = \overset{\circ}{10}$ ... (II)

De (I) y (II):

K + 1: 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100

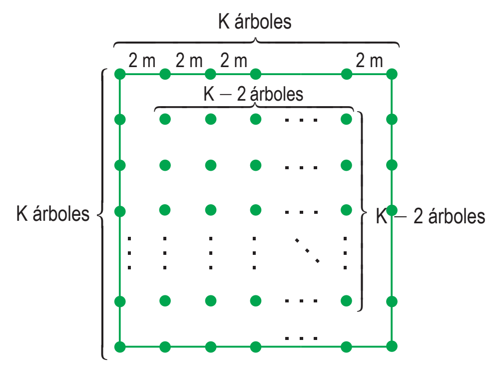
Luego:

$\overline{abc7}$: $\underbrace{1597; 2497; 3597; 4897; 6397; 8097; 9997}_{7 \text{ números}}$

10 En un terreno de forma cuadrada se ha sembrado árboles equidistantes entre sí cada 2 m. Si se sabe que en el interior hay 1849 árboles, ¿cuál es el perímetro?

Resolución:

Del enunciado:



Por dato:

$(K - 2)^2 = 1849$

$(K - 2)^2 = 43^2$

$K = 45$

Entonces, el lado del cuadrado mide:

$2 \times (K - 1) = 2 \times 44 = 88$ m

Piden:

Perímetro = 4 × 88 = 352 m

11 Al extraer la raíz cúbica de un número, se obtuvo como residuo 90, siendo este máximo. Halla dicho número.

Resolución:

Sea N el número, del enunciado:

$N = K^3 + r_{máx.}$

Por dato:

$r_{máx.} = 3K(K + 1) = 90 \Rightarrow K(K + 1) = 30$

$K(K + 1) = 5 \times 6$

$K = 5$

Piden:

$N = 5^3 + 90$

$N = 215$

RAZONES Y PROPORCIONES

Atención

En los ejemplos; podemos decir:

- **Razón aritmética**
  La edad de Max es excedida por la edad de Carlos en 3 años.
- **Razón geométrica**
  La cantidad de naranjas de María y Rosa son como 3 es a 5.

RAZÓN

Es la comparación de dos cantidades mediante la sustracción o división.

CLASES DE RAZÓN

Razón aritmética	Razón geométrica
Es la comparación de dos cantidades mediante la diferencia. $a - b = r$ Donde: a: antecedente; b: consecuente; r: razón Ejemplo: Si Carlos tiene 28 años y Max tiene 25 años, al comparar las edades: $28 - 25 = 3$ Se puede decir que Carlos es mayor que Max por 3 años.	Es la comparación de dos cantidades mediante la división. $\frac{a}{b} = K$ Donde: a: antecedente; b: consecuente; K: razón Ejemplo: María tiene 21 naranjas y Rosa, 35; al comparar las cantidades: $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$ Se puede decir que la cantidad de naranjas de María y Rosa están en la relación de 3 a 5.

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES (SRGE)

Es la igualdad de más de dos razones equivalentes.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

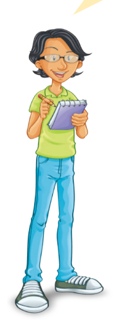
Donde:
$a_1; a_2; \dots; a_n$: antecedentes
k: constante de proporcionalidad
$b_1; b_2; \dots; b_n$: consecuentes

Recuerda

En la SRGE:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$

Se tiene:
a: 1.^{er} término
b: 2.° término
c: 3.^{er} término
d: 4.° término
⋮ ⋮

Además, se cumple:
a = bk; c = dk; e = fk; g = hk



Propiedades

1. $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = k$

   Ejemplo:

   Si $\frac{2}{14} = \frac{4}{28} = \frac{8}{56} = k = \frac{1}{7}$, entonces: $\frac{2 + 4 + 8}{14 + 28 + 56} = \frac{14}{98} = \frac{1}{7} = k$

2. $\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n}{b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots \times b_n} = k^n$

   Ejemplo:

   De lo anterior: $\frac{2 \times 4 \times 8}{14 \times 28 \times 56} = \frac{64}{21\,952} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = k^3$

Serie de razones geométricas equivalentes continuas

Es de la forma: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k$

Se observa:

$d = ek$

$c = dk = (ek)k = ek^2$

$b = ck = (ek^2)k = ek^3$

$a = bk = (ek^3)k = ek^4$

Por propiedad: $\frac{a \times b \times c \times d}{b \times c \times d \times e} = k^4 \Rightarrow \frac{a}{e} = k^4$

PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones de un mismo tipo (aritmética o geométrica) las cuales deben tener la misma razón.

CLASES DE PROPORCIÓN

Proporción aritmética

Es la igualdad de dos razones aritméticas:

$$\underset{1.°}{a} - \underset{2.°}{b} = \underset{3.°}{c} - \underset{4.°}{d}$$

Donde:

a y c: antecedentes — a y d: términos extremos
b y d: consecuentes — b y c: términos medios

Tipos de proporción aritmética

Discreta	Continua
$a - b = c - d \quad (b \neq c)$ Donde: d: cuarta diferencial de a, b y c.	$a - b = b - c$ Donde: b: media diferencial de a y c. c: tercera diferencial de a y b.

Proporción geométrica

Es la igualdad de dos razones geométricas:

$$\frac{a \leftarrow 1.°}{b \leftarrow 2.°} = \frac{c \leftarrow 3.°}{d \leftarrow 4.°}$$

Donde:

a y c: antecedentes — a y d: términos extremos
b y d: consecuentes — b y c: términos medios

Tipos de proporción geométrica

Discreta	Continua
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Donde: d: cuarta proporcional de a, b y c.	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ Donde: b: media proporcional de a y c. c: tercera proporcional de a y b.

Propiedades de una proporción geométrica

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

1. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
2. $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$
3. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{c}$
4. $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$
5. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

Recuerda

En la proporción aritmética se cumple:

Suma de términos extremos = Suma de términos medios

Atención

En la proporción aritmética continua: $a - b = b - c$

Se cumple:

$b = \frac{a+c}{2}$

Observación

En una proporción geométrica se cumple:

Producto de términos extremos = Producto de términos medios

Nota

En la proporción geométrica continua:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Se cumple:

$b = \sqrt{a \times c}$

EFECTUAR

1. El menor de dos números es 64. Halla el número mayor, si los dos números están en relación de 8 a 11.
2. Halla la cuarta proporcional de 4; 5 y 10.
3. La suma de dos números es 315. Si se encuentran en relación de 3 a 4, ¿cuáles son los números?
4. Dos números están en razón de 5 a 13. Si su suma es 180, ¿cuál es el valor de los números?
5. Si la suma de dos números es 48 y están en relación de 11 a 13. ¿Cuál es el producto de dichos números?
6. Tres números son entre sí como 2; 5 y 8. Si la suma de los dos números menores es 35. Halla el mayor.
7. ¿Cuáles son los dos números cuadrados perfectos cuya razón es 4/9 y que sumados dan 52?
8. Dos números están en razón de 2 a 3. Si la suma de ambos es 600, ¿cuál es el valor de los números?

Problemas resueltos

1 Halla 2 números que están en la relación de 3 a 7, y cuya suma sea 150.

Resolución:

Sean los números a y b.

Luego: $a + b = 150$ ... (1)

$\frac{a}{b} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3k}{7k}$ $\begin{cases} a = 3k \\ b = 7k \end{cases}$

Reemplazando en (1):

$3k + 7k = 150$

$10k = 150 \Rightarrow k = 15$

Como:

$a = 3k \Rightarrow a = 45$

$b = 7k \Rightarrow b = 105$

2 La razón de dos números es 3/8 y la suma es 2497. Encuentra el menor de los números y señala su cifra mayor.

Resolución:

$\frac{a}{b} = \frac{3}{8} \wedge 3k + 8k = 2497$

$\Rightarrow k = 227$

Tenemos:

$a = 3(227) = 681$

$b = 8(227) = 1816$

$\therefore$ El menor número es 681 y su cifra mayor es 8.

3 La relación entre dos números es de 11 a 14. Si a uno de ellos se le suma 33 unidades y al otro se le suma 60, entonces ambos resultados serían iguales. Halla dichos números.

Resolución:

Sean los números a y b, del enunciado: $\frac{a}{b} = \frac{11}{14}$

Como $a < b$, entonces:

$a + 60 = b + 33 \Rightarrow 27 = b - a$ ... (I)

Luego:

$\frac{a}{b} = \frac{11}{14} = \frac{11k}{14k} \Rightarrow \begin{matrix} a = 11k \\ b = 14k \end{matrix}$

Reemplazando en (I):

$(14k) - (11k) = 27$

$3k = 27 \Rightarrow k = 9$

Como: $a = 11k = 11(9) = 99$

$b = 14k = 14(9) = 126$

4 A una fiesta asisten 140 personas entre hombres y mujeres. Si por cada 3 mujeres hay 4 hombres y se retiran 20 parejas, ¿cuál es la razón entre el número de mujeres y el número de hombres que se quedan en la fiesta?

Resolución:

Sea H el número de hombres y M el número de mujeres que asisten a la fiesta.

$\frac{M}{H} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{M+H}{H} = \frac{3+4}{4}$

Dato: $M + H = 140$

Entonces: $H = 80 \wedge M = 60$

Si se retiran 20 parejas, entonces el nuevo número de hombres y mujeres es:

$M' = 60 - 20 = 40$

$H' = 80 - 20 = 60$

Por lo tanto: $\frac{M'}{H'} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

5 En una proporción aritmética la suma de extremos es 56, halla la suma de medios.

Resolución:

$\underbrace{a - \underbrace{b = c}_{\text{Medios}} - d}_{\text{Extremos}}$

$a + d = b + c$

$\therefore b + c = 56$

6 En una proporción aritmética continua la media diferencial vale 8. Hallar la suma de cuadrados de los números que no son media diferencial, si la tercera diferencial es 20.

Resolución:

Dato: $b = 8 \wedge c = 20$

$a - b = b - c \Rightarrow a = 2b - c$

$\Rightarrow a = 16 - 20$

$\Rightarrow a = -4$

$\therefore a^2 + c^2 = (-4)^2 + (20)^2 = 416$

7 En un corral hay n aves entre patos y gallinas. Si el número de patos es a n como 7 es a 18 y la razón aritmética entre el número de gallinas y el número de patos es 20. Halla la relación entre el número de patos y el número de gallinas, si se mueren 13 de estas últimas.

Resolución:

Sea:

P: n.° de patos G: n.° de gallinas

Del enunciado: $n = P + G$

También: $\frac{P}{n} = \frac{7}{18} \Rightarrow \frac{P}{P+G} = \frac{7}{18} \Rightarrow \frac{P}{G} = \frac{7k}{11k}$

Además:

$G - P = 20$

$11k - 7k = 20$

$4k = 20$

$k = 5 \Rightarrow P = 35; G = 55$

Nos piden: $\frac{P}{G-13} = \frac{35}{55-13} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$

8 En una serie de n razones geométricas equivalentes continuas, el producto de los términos tiene 33 divisores que poseen raíz enésima. Calcula la media proporcional, si este debe ser la menor posible y todos los términos son enteros positivos.

Resolución:

Sea la serie de n razones geométricas equivalentes continuas:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=...=\frac{a_n}{a_{n+1}}=k$$

Se cumple:

$a_1=a_{n+1}k^n$

$a_2=a_{n+1}k^{n-1}$

$\vdots$

$a_n=a_{n+1}k$

Del enunciado:

$N=(a_1\times a_2\times a_3\times ...\times a_n)\times(a_2\times a_3\times ...\times a_{n+1})$

$$N=\left[(a_{n+1}k^n)\times(a_{n+1}k^{n-1})\times ...\times(a_{n+1}k)\right]\times\left[(a_{n+1}k^{n-1})\times(a_{n+1}k^{n-2})\times ...\times a_{n+1}\right]$$

$$N=\left[a_{n+1}^n k^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]\times\left[a_{n+1}^n k^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]\Rightarrow N=a_{n+1}^{2n}k^{n^2}$$

Por dato, la cantidad de divisores que poseen raíz enésima es 33, entonces:

$$N=\begin{cases}p^{2n}\times q^{10n}\Rightarrow CD[(p^n)^2\times(q^n)^{10}]=3\times 11=33\\ p^{32n}\Rightarrow CD[(p^n)^{32}]=32+1=33\end{cases}$$

Donde p y q son números primos.

Luego:

$a_{n+1}^{2n}\times k^{n^2}=p^{2n}\times q^{10n}\ \vee\ a_{n+1}^{2n}\times k^{n^2}=p^{32n}$

$a_{n+1}^{2}\times k^{n}=p^{2}\times q^{10}\ \vee\ a_{n+1}^{2}\times k^{n}=p^{32}$

Además, sabemos que la media proporcional de los extremos es:

$b=\sqrt{a_1\times a_{n+1}}=\sqrt{(a_{n+1}k^n)\times a_{n+1}}=\sqrt{a_{n+1}^2k^n}$

Nos piden el menor valor de b:

$$b=\begin{cases}\sqrt{p^2\times q^{10}}=p\times q^5\\ \sqrt{p^{32}}=p^{16}\end{cases}$$

Luego:

$$b_{mín.}=\begin{cases}3\times 2^5=96\ ✓\\ 2^{16}\ ✗\end{cases}$$

9 Sea la serie de razones geométricas equivalentes de constante entera positiva:

$$\frac{x+y}{y}=\frac{y+2z}{z}=\frac{z+3t}{t}$$

Donde $\{x; y; z; t\}\subset\mathbb{Z}^+$, $t<5$ calcula $z+y$ si $x=120$.

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{x+y}{y}=\frac{y+2z}{z}=\frac{z+3t}{t}=k\in\mathbb{Z}^+$$

Luego, se cumple:

$z+3t=tk\Rightarrow z=t(k-3)$

$y+2z=zk\Rightarrow y=z(k-2)=t(k-3)(k-2)$

$x+y=yk\Rightarrow x=y(k-1)=t(k-3)(k-2)(k-1)$

Por dato:

$120=t(k-3)(k-2)(k-1)$

$2\times 3\times 4\times 5=t(k-3)(k-2)(k-1)$

$\Rightarrow t=2;\ k=6$

Por lo tanto: $z=2(3)=6;\ y=6(4)=24$

Piden: $z+y=6+24=30$

10 Si: $\frac{xy}{x+1}=3x=\frac{y^2+y}{z}$

Además: $x+z=15$

Halla: x^3y+z

Resolución:

Al dividir la expresión entre y, se tiene:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{3x}{y}=\frac{y+1}{z}=K\ \ ...(1)$$

Por propiedad de las SRGE:

$$\frac{x+3x}{x+1+y}=\frac{x+y+1}{x+1+z}=K\Rightarrow\frac{4x}{x+y+1}=\frac{x+y+1}{16}=K$$

En la proporción geométrica formada se tiene:

$4x=16K^2$

$x=4K^2\Rightarrow K^2=x/4$

Luego:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=K^2\Rightarrow\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{x}{4}$$

$4x=x^2+2x+1$

$0=x^2+2x+1-4x$

$0=x^2-2x+1$

$0=(x-1)^2$

$x=1$

Entonces: $K=1/2\ \vee\ K=-1/2$

- Si $K=-1/2$: $y=\frac{3x}{K}=\frac{3(1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-6;\ z=15-x=15-1=14$

  Luego; en (1):

  $\frac{1}{2}\neq\frac{3}{-6}\neq\frac{-5}{14}$

- Si $K=1/2$: $y=\frac{3x}{K}=\frac{3(1)}{\left(\frac{1}{2}\right)}=6;\ z=14$

  Luego, en (1):

  $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{7}{14}$ (sí se cumple)

  Nos piden:

  $x^3y+z=1\times 6+14=20$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Nota

Ejemplo:

Magnitud	Cantidad
Longitud	17 m
Masa	23,5 kg

MAGNITUD

Es todo aquello que posee la cualidad o característica susceptible de variar.

CANTIDAD

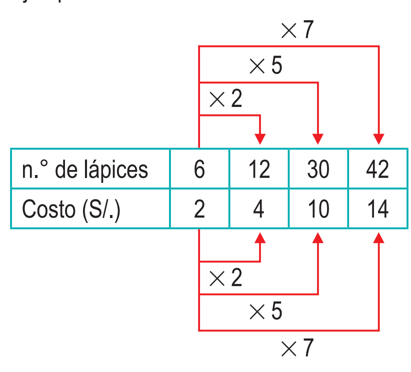
Es el resultado de la medición o cuantificación de la intensidad de una magnitud.

RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES

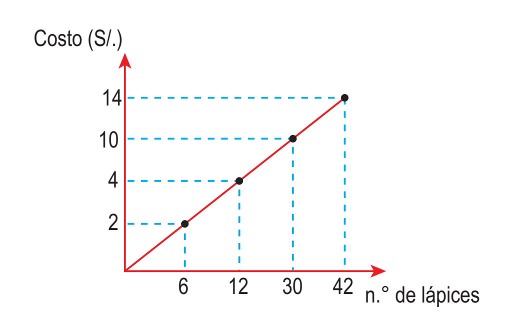
Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Dos magnitudes son directamente proporcionales, si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra también queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo:



n.° de lápices	6	12	30	42
Costo (S/.)	2	4	10	14



Recuerda

- A DP B $\Longleftrightarrow \dfrac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = \text{cte.}$
- A IP B $\Longleftrightarrow$ (Valor de A) × (Valor de B) = cte.

Se observa que si el número de lápices es multiplicado por un número, entonces el valor correspondiente al costo es multiplicado también por dicho número. Por ello podemos afirmar que el número de lápices y el costo son magnitudes directamente proporcionales. Se denota:

(n.° de lápices) DP (Costo)

También se observa: $\dfrac{6}{2} = \dfrac{12}{4} = \dfrac{30}{10} = \dfrac{42}{14} = 3$ (constante)

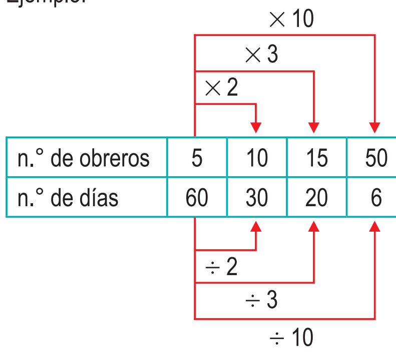
Con lo cual se puede afirmar que el cociente de los valores correspondientes del n.° de lápices y el costo es constante. Luego:

$$\frac{(\text{n.° de lápices})}{(\text{Costo})} = \text{cte.}$$

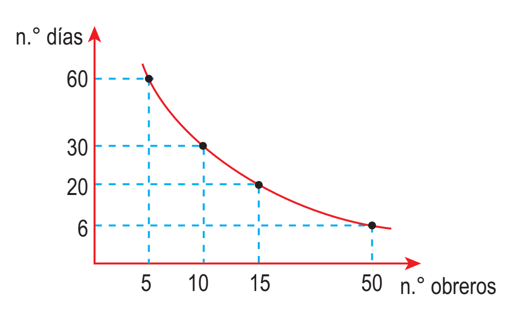
Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si al multiplicar el valor de una de ellas por un número entero, el valor correspondiente de la otra queda dividido por dicho número.

Ejemplo:



n.° de obreros	5	10	15	50
n.° de días	60	30	20	6



Atención

Algunas propiedades

1. Si A DP B, entonces B DP A.
2. Si A IP B, entonces B IP A.
3. Si A DP B, entonces A IP $\frac{1}{B}$.
4. Si A IP B, entonces A DP $\frac{1}{B}$.
5. Si A DP B cuando C es constante y A IP C cuando B es constante, entonces:

$$\frac{(\text{Valor de A}) \times (\text{Valor de C})}{(\text{Valor de B})} = \text{cte.}$$

Se observa que si el n.° de obreros es multiplicado por un número, el valor correspondiente al n.° de días queda dividido por dicho número. Por ello, podemos afirmar que el n.° de obreros y el n.° de días son magnitudes inversamente proporcionales. Se denota:

(n.° de obreros) IP (n.° de días)

También se observa:

$$5 \times 60 = 10 \times 30 = 15 \times 20 = 50 \times 6 = 300 \text{ (constante)}$$

Con lo cual se puede afirmar que el producto de los valores correspondientes del n.° de obreros y el n.° de días es constante. Luego:

$$(\text{n.° de obreros}) \times (\text{n.° de días}) = \text{cte.}$$

Observación

Si A DP B, entonces también se puede escribir:

$A \,\alpha\, B$

REPARTO PROPORCIONAL

Es una aplicación de las magnitudes proporcionales que consiste en distribuir una cantidad de partes que sean directa o inversamente proporcionales a ciertos números dados.

CLASES DE REPARTO

Reparto simple

a) **Reparto simple directo.** Consiste en repartir una cantidad en partes que sean DP a ciertos números.

Ejemplo:
Hugo desea repartir S/.200 entre sus cuatro ahijadas: Andrea, Bertha, Carolina y Deysi; en proporción a sus edades que son: 15; 12; 8 y 5 años respectivamente. ¿Cuánto recibe cada una?

Resolución:

$$200\begin{cases} \text{DP} & & \\ 15 & \Rightarrow & 15k \\ 12 & \Rightarrow & 12k \\ 8 & \Rightarrow & 8k \\ 5 & \Rightarrow & 5k \end{cases} \quad (+)$$

$$40k = 200$$
$$k = 5$$

Luego:
$15k = 15(5) = \text{S/.}75$
$12k = 12(5) = \text{S/.}60$
$8k = 8(5) = \text{S/.}40$
$5k = 5(5) = \text{S/.}25$

Atención

En este ejemplo, a los números 15; 12; 8 y 5 se les denomina **índices de reparto.**

b) **Reparto simple inverso.** Consiste en repartir una cantidad en partes que sean IP a ciertos números.

Ejemplo:
Martín propone repartir un premio de S/.1560 entre tres operarios de acuerdo con su asistencia en un semestre. Si Ángel faltó 4 días, Braulio faltó 2 días y Carlos faltó 3 días, ¿cuánto le corresponde a cada uno de estos?

Resolución:
Calculamos: MCM(4; 2; 3) = 12

$$1560\begin{cases} \text{IP} & \text{DP} & & \\ 4 & \frac{1}{4} \times 12 = 3 & \Rightarrow & 3k \\ 2 & \frac{1}{2} \times 12 = 6 & \Rightarrow & 6k \\ 3 & \frac{1}{3} \times 12 = 4 & \Rightarrow & 4k \end{cases} \quad (+)$$

$$13k = 1560$$
$$k = 12$$

Luego:
$3k = 3(12) = \text{S/.}36$
$6k = 6(12) = \text{S/.}72$
$4k = 4(12) = \text{S/.}48$

Nota

En este ejemplo, los índices de reparto son: 4; 2 y 3.

Reparto compuesto

Ejemplo:
Reparte 580 en partes DP a 6; 8 y 9; e IP a 5; 4 y 12 y DP a 10; 7 y 4.

Resolución:

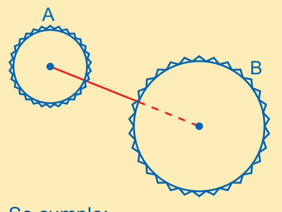
$$580\begin{cases} \text{DP} & \text{IP} & \text{DP} & \Rightarrow & \text{DP} & & \\ 6 & 5 & 10 & & 6 \times \frac{1}{5} \times 10 = 12 & \Rightarrow & 12k \\ 8 & 4 & 7 & & 8 \times \frac{1}{4} \times 7 = 14 & \Rightarrow & 14k \\ 9 & 12 & 4 & & 9 \times \frac{1}{12} \times 4 = 3 & \Rightarrow & 3k \end{cases} \quad (+)$$

$$29k = 580$$
$$k = 20$$

Luego:
$12k = 12 \times 20 = 240$
$14k = 14 \times 20 = 280$
$3k = 3 \times 20 = 60$

Recuerda

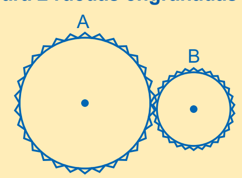
Para 2 ruedas unidas por un eje común



Se cumple:

$$\text{n.° vueltas de A} = \text{n.° vueltas de B}$$

Para 2 ruedas engranadas



Se cumple:

$$N_A \times V_A = N_B \times V_B$$

Donde:
V_A: n.° vueltas de A
V_B: n.° vueltas de B
N_A: n.° dientes de A
N_B: n.° dientes de B

En general:

(n.° vueltas) IP (n.° dientes)

Problemas resueltos

1 Sabiendo que A es IP a B y B es IP a C. Halla A cuando $C = \sqrt{3}$; si cuando $A = \sqrt{27}$; C vale 3.

Resolución:

Del enunciado:

$A \cdot B = k_1$ ...(I) $\wedge$ $B \cdot C = k_2$ ...(II)

Dividiendo (I) y (II): $\frac{A}{C} = k_3$ (constante)

Igualando condiciones: $\frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{27}}{3} \Rightarrow A = \frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 3$

$\therefore$ A = 3

2 A es DP al cubo de B, el cuadrado de B es DP a la raíz cuadrada de C, y C es IP al cuadrado de D. Si cuando A = 3; D = 4. Halla A, cuando $D = 2\sqrt[3]{18}$.

Resolución:

Del problema tenemos:

$\frac{A}{B^3} = K_1$ ...(I)

$\frac{B^2}{\sqrt{C}} = K_2 \Rightarrow \frac{B^4}{C} = K_2^2$ ...(II)

$\frac{C}{D^2} = K_3$ ...(III)

Multiplicando (II) y (III): $\frac{B^4}{D^2} = K_2^2 \times K_3 = K_4$

$\Rightarrow \frac{B^3}{D^{\frac{3}{2}}} = K_4^{\frac{3}{4}}$ ...(IV)

Multiplicando (I) y (IV): $\frac{A}{D^{\frac{3}{2}}} = K_1 \times K_4^{\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow \frac{A}{D^{\frac{3}{2}}} = K_5$ (constante)

Nos piden: $\frac{3}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{(2\sqrt[3]{18})^{\frac{3}{2}}}$ $\therefore A = \frac{9}{2}$

3 Sabiendo que A es DP a B^2 y B^2 es DP a C. Halla A cuando C = 6, si cuando A vale 144, C = 72.

Resolución:

Del enunciado:

$\frac{A}{B^2} = k_1$ ...(I)

$\frac{B^2}{C} = k_2$ ...(II)

Multiplicando (I) y (II): $\frac{A}{C} = k_1 \cdot k_2 \Rightarrow \frac{A}{C} = k_3$ (constante)

Igualando condiciones: $\frac{A}{6} = \frac{144}{72} \Rightarrow \frac{A}{6} = 2 \Rightarrow A = 12$

Luego, el valor de A es 12.

4 Se reparte M en forma DP a $4\sqrt{b}$, $5\sqrt{b}$, $7\sqrt{b}$. Si la diferencia de la parte mayor y la menor es 192, halla M.

Resolucion:

M se reparte DP a $4\sqrt{b}$, $5\sqrt{b}$, $7\sqrt{b}$; entonces:

$$\begin{array}{r} 4k \; + \\ 5k \\ \underline{7k} \\ 16k \end{array} \Rightarrow M = 16k$$

Dato:

$7k - 4k = 192$

$3k = 192$

$k = 64$

$\Rightarrow M = 16k$

$M = 64(16)$ $\therefore$ M = 1024

5 Si A DP $\sqrt{B}$ y B DP a C^3, ¿cómo se relacionan A y C?

Resolución:

$\frac{A}{\sqrt{B}} = K_1 \Rightarrow \frac{A^2}{B} = K_1^2$ ...(I) $\qquad \frac{B}{C^3} = K_2$ ...(II)

(I) × (II): $\frac{A^2}{C^3} = K_1^2 \times K_2 = K_3$ (Constante)

$\therefore A^2$ DP C^3

6 Divide 1320 en forma DP a $\sqrt{1183}$; $\sqrt{1372}$ y $\sqrt{2023}$. Da como respuesta la mayor de las partes.

Resolución:

Reduciendo cada uno de los radicales.

$\sqrt{1183} = 13\sqrt{7}$; $\sqrt{1372} = 14\sqrt{7}$ y $\sqrt{2023} = 17\sqrt{7}$

Como las 3 partes tienen un factor en común, podemos simplificar ese factor.

		DP	DP		
1320	A	$13\sqrt{7}$	13	$\Rightarrow$	A = 13k
	B	$14\sqrt{7}$	14	$\Rightarrow$	B = 14k
	C	$17\sqrt{7}$	17	$\Rightarrow$	C = 17k

Del dato:

$A + B + C = 1320 \Rightarrow 13k + 14k + 17k = 1320$

$44k = 1320$

$\Rightarrow k = 30$

$\therefore$ La mayor parte es: 17k = 17(30) = 510

7 Se reparte 160 380 DP a todos los números pares de 2 cifras. ¿Cuánto le tocará a 50?

Resolución:

$$160\,380 \left\{ \begin{array}{c} \text{DP} \\ 10K \\ 12K \\ \vdots \\ \underline{98K} \\ 2430K \end{array} \right. \qquad \Rightarrow 2430K = 160\,380$$

K = 66

Luego: 50K = 50(66) = 3300

8 El precio de un ladrillo es proporcional a su peso e IP a su volumen; un ladrillo de densidad 1,5 g/cm^3 cuesta 300 soles. ¿Cuánto costará un ladrillo de 400 cm^3 que pesa 1,6 kg?

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Precio DP Peso}\\ \text{Precio IP Volumen}\end{array}\right\} \frac{\text{Precio}\times\text{Volumen}}{\text{Peso}} = k \text{ (cte.)}$$

Sabemos: $\text{Densidad} = \dfrac{\text{Peso}}{\text{Volumen}}$

Entonces 15 g ocupa un volumen de 10 cm^3.

Por dato: 1,6 kg <> 1600 g

Igualando condiciones: $\dfrac{300\,.\,10}{15} = \dfrac{x\,.\,400}{1600} \Rightarrow x = 800$

∴ El precio del ladrillo será de 800 soles.

9 Tino deja S/.111 000 a 2 sobrinos, 3 nietos y 5 primos; advirtiendo que la parte de cada primo debe ser los 3/4 de la de un nieto y la de un nieto 4/5 de la de un sobrino. ¿Cuánto le toca a cada primo?

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{3}{4}n \Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{3}{4} \\ n = \frac{4}{5}s \Rightarrow \frac{n}{s} = \frac{4}{5}\end{array}\right\}$$

p = 3k, pero son 5 primos
n = 4k, pero son 3 nietos
s = 5k, pero son 2 sobrinos

Se cumple que: $10k + 12k + 15k = 111\,000$
De donde: $k = 3000$
∴ A cada primo le toca: 3(3000) = S/.9000

10 Un anciano repartió su herencia entre sus dos sirvientes proporcionalmente a sus años de servicio que son 18 y 20 años e inversamente proporcional a sus edades de 26 y 36 años respectivamente. Determina el monto de la herencia si el mayor recibió S/.1600 más que el menor.

Resolución:

Sean:
H: herencia a repartir
A: años de servicio
E: edad

Luego: $\dfrac{H\,.\,E}{A} \Rightarrow \dfrac{H_1\,.\,26}{18} = \dfrac{H_2\,.\,36}{20} \Rightarrow \dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{81}{65}$

Por dato:
$H_1 - H_2 = 1600$
$81K - 65K = 1600$
$16K = 1600$
$K = 100$

Luego:
$81K + 65K = 146K$
$= 146(100)$
$=$ S/.14 600

11 Se reparte S/.14 560 entre 3 personas de manera que lo que le toca a la primera es a la segunda como 5 es a 6 y lo que le toca a la segunda es a la tercera como 8 es a 7. ¿Cuánto le toca a la segunda persona?

Resolución:

Sean las personas A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{B} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{40}{48} \\ \frac{B}{C} = \frac{8}{7} \Rightarrow \frac{B}{C} = \frac{48}{42}\end{array}\right\}$$

A = 40k
B = 48k
C = 42k

Entonces: $40k + 48k + 42k = 14\,560$
$130k = 14\,560 \Rightarrow k = 112$

∴ A la segunda persona le toca: 48(112) = S/.5376

12 Se contrató 3 ómnibus para transportar 48 turistas a un costo de 20 880 soles. El primero transportó 12 turistas a 44 km, el segundo 20 turistas a 30 km y el tercero 16 turistas a 60 km. ¿Cuánto costó el transporte del grupo de mayor número de turistas?

Resolución:

Debemos tener en cuenta que el costo de transporte es proporcional al número de turistas y a la distancia recorrida.

Costo total: 20 880

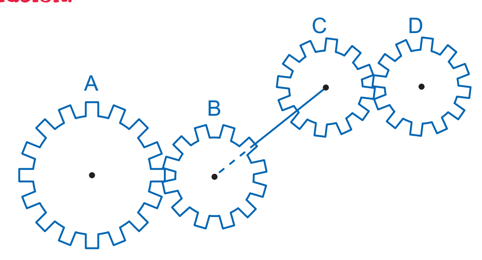
Turistas	km	DP		
12	44	12.44 = 24.22	⇒	22k
20	30	20.30 = 24.25	⇒	25k
16	60	16.60 = 24.40	⇒	40k

(+)
$87k = 20\,880$
$k = 240$

Por lo tanto, para los 20 turistas costó: 25k = 25(240) = S/.6000

13 Una rueda A de 180 dientes se engrana con otra rueda B de 60 dientes. Fija al eje de B hay otra rueda C de 40 dientes que está engranada a otra rueda D de 45 dientes. Si A da 120 revoluciones por minuto, ¿cuántas revoluciones dará D en 4 minutos?

Resolución:



En las ruedas engranadas se cumple:
(n.° de dientes) IP (n.° de vueltas)

⇒ (n.° de dientes) × (n.° de vueltas) = cte.

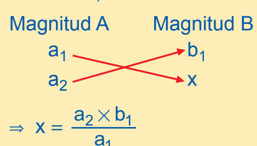
Además, se sabe también que si las ruedas están unidas por el mismo eje, dan un mismo número de vueltas, entonces:
$180 \times 120 = 60 \times V_B \Rightarrow V_B = 360$ rpm
Luego: $V_B = V_C = 360$ rpm
También: $N_C \times V_C = N_D \times V_D$
$40 \times 360 = 45 \times V_D$
$V_D = 320$ rpm

∴ En 4 minutos D dará: 320 × 4 = 1280 vueltas

REGLA DE TRES

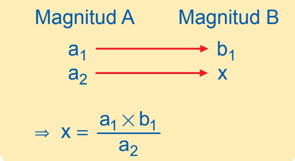
Para resolver una regla de tres simple puedes usar el siguiente método:

1. Si A DP B, entonces:



$\Rightarrow x = \dfrac{a_2 \times b_1}{a_1}$

2. Si A IP B, entonces:



$\Rightarrow x = \dfrac{a_1 \times b_1}{a_2}$

CLASIFICACIÓN DE LA REGLA DE TRES

1. Regla de tres simple

La usaremos cuando en la comparación intervengan solo dos magnitudes proporcionales. Se divide en dos clases:

Regla de tres simple directa. Cuando las magnitudes son directamente proporcionales.

Magnitud A	Magnitud B
a_1	b_1
a_2	x

Se cumple: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{x} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{a_2 \times b_1}{a_1}}$

Regla de tres simple inversa. Cuando las magnitudes son inversamente proporcionales.

Magnitud A	Magnitud B
a_1	b_1
a_2	x

Se cumple: $a_1 \times b_1 = a_2 \times x \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{a_1 \times b_1}{a_2}}$

2. Regla de tres compuesta

La usaremos cuando en la comparación intervengan más de dos magnitudes.

Ejemplo:

Seis obreros trabajando 16 días, 10 horas diarias, pueden asfaltar 1200 m de una autopista. ¿Cuántos días emplearán 8 obreros trabajando 8 horas diarias para asfaltar 1600 m de la misma autopista?

Resolución:

Ordenamos las magnitudes y los valores:

n.° de obreros	Tiempo (días)	Horas diarias	Obra (m)
6	16	10	1200
8	t	8	1600

En el cuadro podemos observar que la incógnita aparece en la columna que corresponde a la magnitud tiempo. Luego, al comparar esta magnitud con cada una de las otras tres magnitudes se tiene:

- (Tiempo) IP (n.° de obreros)
- (Tiempo) IP (Horas diarias)
- (Tiempo) DP (Obra)

En el esquema:

IP (n.° de obreros – Tiempo); IP (Tiempo – Horas diarias); DP (Tiempo – Obra)

n.° de obreros	Tiempo (días)	Horas diarias	Obra (m)
6	16	10	1200
8	t	8	1600

Entonces:

$$\frac{6 \times 16 \times 10}{1200} = \frac{8 \times t \times 8}{1600} \Rightarrow t = 20$$

$\therefore$ En 20 días, 8 obreros, trabajando 8 horas diarias, asfaltarán 1600 m de la autopista.

Recuerda

Si A DP B cuando C es constante y A IP C cuando B es constante, entonces:

$\dfrac{A \times C}{B} = \text{cte.}$

En el ejemplo:

$\dfrac{(\text{Tiempo}) \times (\text{n.° de obreros}) \times (\text{h/d})}{(\text{Obra})} = \text{cte.}$

Problemas resueltos

1 Se ha contratado a 5 costureras que hacen 12 vestidos en 15 días. Si se necesita tener 60 vestidos en 25 días, ¿cuántas costureras doblemente rápidas se pueden contratar además de las que ya se tienen?

Resolución:

	DP	IP
Costureras	Vestidos	Días
5	12	15
5 + 2x	60	25

$5 + 2x = 5 \cdot \frac{60}{12} \cdot \frac{15}{25}$

$5 + 2x = 15 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

Luego, se contratarán 5 costureras más.

2 Una obra la pueden hacer 27 hombres, en cierto tiempo. ¿Cuántos obreros se necesitarán aumentar para hacer 1/3 de la obra en un tiempo igual a 3/7 del anterior trabajando la mitad de horas diarias?

Resolución:

	IP	IP	DP
Obreros	Tiempo	Horas	Obra
27	t	h	o
x	$\frac{3t}{7}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{3}o$

$x = 27 \cdot \frac{7}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}$

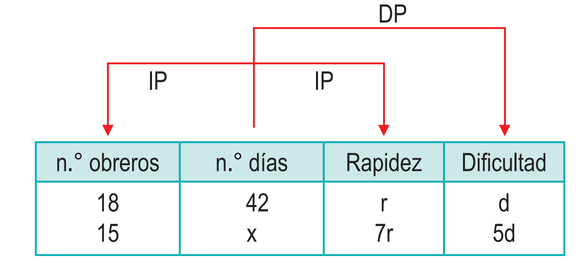
$x = 42$

Luego, necesitarán aumentar: $42 - 27 = 15$ obreros.

3 Con 18 obreros se puede hacer una obra en 42 días. ¿En cuántos días, 15 obreros 6 veces más rápidos que los anteriores, harán una obra cuya dificultad es el quíntuple de la anterior?

Resolución:

Colocamos en dos filas los datos correspondientes a cada una de estas magnitudes, es decir:



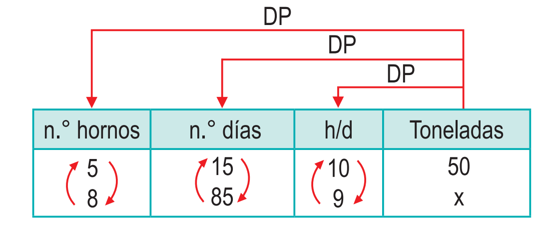
n.° obreros	n.° días	Rapidez	Dificultad
18	42	r	d
15	x	7r	5d

$x = 42 \times \frac{18}{15} \times \frac{r}{7r} \times \frac{5d}{d}$

$\therefore\ x = 36$ días

4 Trabajando 10 horas diarias durante 15 días; 5 hornos consumen 50 toneladas de carbón. ¿Cuántas toneladas serían necesarias para mantener trabajando 9 horas diarias durante 85 días 3 hornos más?

Resolución:



n.° hornos	n.° días	h/d	Toneladas
5	15	10	50
8	85	9	x

Luego:

$x = 50 \times \frac{8}{5} \times \frac{85}{15} \times \frac{9}{10}$

$x = 408$ toneladas

5 Una torta en forma de cubo pesa 2160 g. El peso en gramos de una minitorta de igual forma pero con sus dimensiones reducidas a su tercera parte es:

Resolución:

Se trata de una regla de tres simple.
Sea **a**: lado de la torta en forma de cubo.

DP	
Volumen	Peso
a^3	2160 g
$\left(\frac{a}{3}\right)^3$	x

$x = \dfrac{\left(\frac{a^3}{27}\right).2160}{a^3} \Rightarrow x = 80$ g

6 Una cuadrilla de obreros pueden hacer una obra en 18 días. En los primeros 10 días trabajó solamente la mitad de la cuadrilla; para terminar la obra trabajan 13 obreros durante 24 días. ¿Cuántos obreros constituyen la cuadrilla?

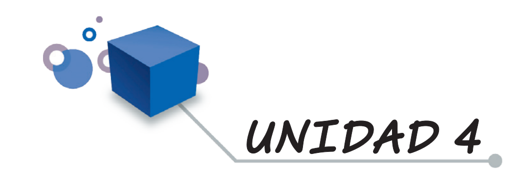
Resolución:

Como x obreros en 18 días harían una obra; x/2 obreros harían la misma obra en 36 días.
Luego, planteamos:

	IP	DP
Obreros	n.° días	Obra
$\frac{x}{2}$	10	$\frac{10}{36}$
13	24	$\frac{26}{36}$

De donde: $\frac{x}{2} = \frac{13 \times 24 \times 10}{10 \times 26}$

$\therefore\ x = 24$ obreros



TANTO POR CIENTO

Nota

El tanto por ciento tiene su equivalente con un número racional positivo y viceversa.

Ejemplos:

$25\% <> \frac{25}{100} <> \frac{1}{4}$

$50\% <> \frac{50}{100} <> \frac{1}{2}$

$75\% <> \frac{75}{100} <> \frac{3}{4}$

Cuando decimos el 100% de una cantidad N significa que dividimos a la cantidad en 100 partes iguales y que tomamos las 100 partes, es decir:

$100\%N = N$

DEFINICIÓN

Es el número de partes tomadas de una cantidad dividida en 100 partes iguales, el cual se representa gráficamente así:

100 partes iguales a $\frac{1}{100}$

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

n partes

Las n partes tomadas equivalen al n por ciento del total, es decir los $\frac{n}{100}$ del total. Luego:

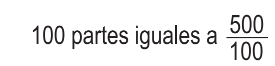
$$\frac{n}{100} = n\%$$

Cuando decimos el n% de una cantidad N, significa que dividimos a la cantidad en 100 partes iguales y tomamos n de esas partes, entonces:

$$\text{n por ciento de N} <> \frac{n}{100}N = n\%N$$

Ejemplo:

18 por ciento de 500.



100 partes iguales a $\frac{500}{100}$

$\frac{500}{100}$	$\frac{500}{100}$	$\frac{500}{100}$	...	$\frac{500}{100}$	$\frac{500}{100}$	...	$\frac{500}{100}$	$\frac{500}{100}$	$\frac{500}{100}$	$<> \frac{18}{100} \times 500 = 18\%(500)$

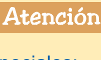
18 partes

PORCENTAJE

Es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad.

Ejemplos:

- $30\%(650) = \frac{30}{100} \times 650 = 195 \Rightarrow \underbrace{30\%(650)}_{\text{Tanto por ciento}} = \underbrace{195}_{\text{Porcentaje}}$
- $17\%(400) = \frac{17}{100} \times 400 = 68 \Rightarrow \underbrace{17\%(400)}_{\text{Tanto por ciento}} = \underbrace{68}_{\text{Porcentaje}}$



Casos especiales:

- $N + a\%N = (100 + a)\%N$
- $N - a\%N = (100 - a)\%N$

OPERACIONES CON EL TANTO POR CIENTO

1. $x\%N + y\%N = (x + y)\%N$

   Ejemplo:

   $15\%(300) + 18\%(300) = 33\%(300) = 99$

2. $x\%N - y\%N = (x - y)\%N$

   Ejemplo:

   $67\%(400) - 43\%(400) = 24\%(400) = 96$

3. $m \times (n\%N) = (m \times n)\%N$

Ejemplo:

$3 \times [39\%(8000)] = (3 \times 39)\%(8000) = 117\%(8000)$
$= 9360$

4. El m% del n% del p% de N es: $m\%n\%p\%N$

Ejemplo:

El 25% del 40% del 80% de 900 es:

$25\%40\%80\%(900) = \frac{25}{100} \times \frac{40}{100} \times \frac{80}{100} \times 900 = 72$

AUMENTOS Y DESCUENTOS SUCESIVOS

Aumentos sucesivos

Son aquellos aumentos que se van efectuando uno a continuación del otro, considerando como el nuevo 100% a la cantidad que se va formando.

Ejemplo:

Si el precio de un DVD es S/.150 y sufre dos aumentos sucesivos del 20% y 25%, ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución:

1.er aumento: $150 + 20\%(150) = 120\%(150) = \frac{120}{100} \times 150 = 180$

2.° aumento: $180 + 25\%(180) = 125\%(180) = \frac{125}{100} \times 180 = 225$

$\therefore$ El nuevo precio del DVD será S/.225.

Aumento único. Dos aumentos sucesivos del $a_1\%$ y $a_2\%$ equivalen a un aumento único de:

$$\left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 \times a_2}{100}\right)\%$$

En general, n aumentos sucesivos del $a_1\%$; $a_2\%$; ...; $a_n\%$ equivalen a un aumento único de:

$$\left[\frac{(100 + a_1) \times (100 + a_2) \times \ldots \times (100 + a_n)}{100^{n-1}} - 100\right]\%$$

Observación

1.er aumento de $a_1\%$: $a_1\%N$

Se tiene: $N + a_1\%N$

2.° aumento de $a_2\%$: $a_2\%(N + a_1\%N)$

Luego, el aumento total es la suma de los dos aumentos:

$a_1\%N + a_2\%(N + a_1\%N)$

$\text{Aumento total} = \left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 \times a_2}{100}\right)\%N$

Descuentos sucesivos

Son aquellos descuentos que se van efectuando uno a continuación del otro, considerando como el nuevo 100% a la cantidad que va quedando.

Ejemplo:

Si al precio de un televisor que cuesta S/.1800, se le hace dos descuentos sucesivos del 10% y 30%, ¿cuál será el nuevo precio?

Resolución:

1.er descuento: $1800 - 10\%(1800) = 90\%(1800) = 1620$

2.° descuento: $1620 - 30\%(1620) = 70\%(1620) = 1134$

$\therefore$ El nuevo precio del televisor será S/.1134.

Descuento único. Dos descuentos sucesivos del $d_1\%$ y $d_2\%$ equivalen a un descuento único de:

$$\left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \times d_2}{100}\right)\%$$

En general, n descuentos sucesivos del $d_1\%$; $d_2\%$; ... ; $d_n\%$ equivalen a un descuento único de:

$$\left[100 - \frac{(100 - d_1) \times (100 - d_2) \times \ldots \times (100 - d_n)}{100^{n-1}}\right]\%$$

Atención

1.er descuento de $d_1\%$: $d_1\%N$

Queda: $N - d_1\%N$

2.° descuento de $d_2\%$: $d_2\%(N - d_1\%N)$

Luego, el descuento total es la suma de los dos descuentos:

$d_1\%N + d_2\%(N - d_1\%N)$

$\text{Descuento total} = \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \times d_2}{100}\right)\%N$

> **Nota**
> Si queremos saber qué tanto por ciento (x%) es n de N, bastará con resolver la siguiente relación:
> $$x\% = \frac{n}{N} \times 100\%$$

VARIACIONES PORCENTUALES

Cuando se analiza las variaciones porcentuales, por ejemplo geométricas, se puede asumir un número apropiado a cada elemento geométrico que facilite su cálculo, luego se aplica una regla de tres simple directa, para obtener la variación porcentual equivalente.

Ejemplo:
Si la longitud del lado de una región cuadrada aumenta en 20%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

Resolución:
Sea L la longitud del lado de la región cuadrada. Luego asumimos: L = 10 u

Entonces, el área inicial de la región cuadrada (A_i) será igual a: $A_i = L^2 = 100\ u^2$

Del enunciado, la longitud del lado de la región cuadrada aumenta en 20%, es decir:

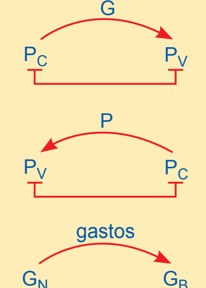
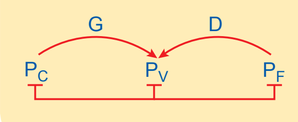
$$L + 20\%L = 10\ u + 20\%(10\ u) = 120\%(10\ u) = \frac{120}{100}(10\ u) = 12\ u$$

Entonces, el área final de la región cuadrada (A_f) es igual a: $A_f = (12\ u)^2 = 144\ u^2$

Luego:

$100\ u^2 \longrightarrow 100\%$
$144\ u^2 \longrightarrow x$
$$\Rightarrow x = \frac{144 \times 100\%}{100} = 144\%$$

$\therefore$ Aumento porcentual = 144% – 100% = 44%

> **Recuerda**
> - Las ganancias se representan como un tanto por ciento del precio de costo.
> - Los descuentos se representan como un tanto por ciento del precio fijado.
> - Gráficamente se tiene:
>
> 
>
>
> - Se cumple:
>
> $$P_C + G = P_F - D$$
>
> Gráficamente:
>
> 
>

APLICACIONES COMERCIALES DEL TANTO POR CIENTO

Elementos:

- **Precio de costo (P_C).** Es lo que el comerciante invierte en la adquisición de una mercadería para luego venderla.
- **Precio de venta (P_V).** Es lo que el cliente paga al comerciante por la compra de la mercadería.
- **Precio fijado (P_F).** Es el valor que pide el comerciante por la mercadería que ofrece.
- **Ganancia (G).** Es la diferencia que se obtiene cuando la mercadería se vende a un precio mayor que el costo.
- **Pérdida (P).** Es la diferencia que resulta cuando la mercadería se vende a un precio menor que el costo.
- **Descuento (D).** Es la rebaja que obtiene el cliente al comprar la mercadería a un precio menor que el precio fijado.

Se presentan los siguientes casos:

1. $P_V > P_C$ (hay ganancia)
   Se cumple: $P_V = P_C + G$
2. $P_V < P_C$ (hay pérdida)
   Se cumple: $P_V = P_C - P$
3. $P_V = P_C$
   No hay ganancia ni pérdida.
4. Si hay descuento, entonces se cumple:
   $P_V = P_F - D$
5. Sean:
   G_B: ganancia bruta G_N: ganancia neta
   Se cumple: $P_V = P_C + G_B$
   Donde: $G_B = G_N + \text{gastos}$

Ejemplo:
Un comerciante compra una mercadería en los Olivos y aborda una movilidad hacia su negocio ubicado en San Martín de Porres. Para su venta, fija su precio en S/.400, pero al venderla aumenta su precio en 5% con lo cual gana el 20%. ¿Cuánto le cobró la movilidad, si esa cantidad representa el 12% de su ganancia neta?

Resolución:
Del enunciado: $P_F = 400$; $P_V = P_F + 5\%P_F = 105\%P_F$; $G_B = 20\%P_C$; gastos $= 12\%G_N$

Entonces: $P_V = \frac{105}{100}(400) = 420$

Como $P_V = P_C + G_B$, se tiene: $P_V = P_C + 20\%P_C = 120\%P_C \Rightarrow P_C = \frac{100}{120}P_V \Rightarrow P_C = \frac{100}{120}(420) = 350$

Luego: $G_B = 20\%P_C = \frac{20}{100}(350) = 70$

También: $G_B = G_N + \text{gastos} \Rightarrow G_B = G_N + 12\%G_N \Rightarrow G_B = 112\%G_N \Rightarrow G_N = \frac{100}{112}G_B \Rightarrow G_N = \frac{100}{112}(70) = 62{,}5$

Piden: gastos = 12%(62,5) = 7,5

$\therefore$ Al comerciante le cobran S/.7,5 en movilidad.

Problemas resueltos

1 El precio de un reloj es igual al 75% del precio de una calculadora, y a su vez el precio de una calculadora es igual al 66,6% del 80% del precio de un libro de Aritmética. Calcula el precio de la calculadora, si Juan pagó por la compra de los 3 objetos S/.116.

Resolución:

Sean:
Precio del reloj: P_R Precio de la calculadora: P_C
Precio del libro: P_L

Entonces: $P_R = 75\%P_C = \frac{3}{4}P_C$ ...(1)

$P_C = 66,\widehat{6}\%80\%P_L = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}P_L = \frac{8}{15}P_L$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $P_R = \frac{3}{4}\times\frac{8}{15}P_L = \frac{2}{5}P_L$

Pero: $P_R + P_C + P_L = 116$

Reemplazando: $\frac{2}{5}P_L + \frac{8}{15}P_L + P_L = 116$

$$\frac{29}{15}P_L = 116 \Rightarrow P_L = 60$$

Piden: $P_C = \frac{8}{15}P_L = \frac{8}{15}(60) = S/.32$

2 Un comerciante vende un televisor ganando el 50% del costo, si luego vende otro televisor (igual al primero) perdiendo el 25% del precio de venta, ¿cuánto ganó o perdió?

Resolución:

En la 1.ª venta: Ganancia $= 50\%P_C$
En la 2.ª venta: P_C – Pérdida $= P_V$

$$P_C - 25\%P_V = P_V \Rightarrow P_C = \frac{5}{4}P_V$$

Luego: $P_V = \frac{4}{5}P_C = \frac{4}{5}.100\%P_C \Rightarrow P_V = 80\%P_C$

Además: Pérdida $= 20\%P_C$

$\therefore$ Ganó $= 50\%P_C - 20\%P_C = 30\%P_C$

3 En una fábrica el precio de un artículo es 15 soles. Un comerciante adquiere 5 de estos artículos por los que le hacen el 20% de descuento. Luego los vende obteniendo por ellos 80 soles. ¿Qué porcentaje del precio de venta de cada artículo está ganando?

Resolución:

1 artículo: 15 soles $\Rightarrow$ 5 artículos: $5\times 15 = 75$ soles
Por comprar 5 artículos el descuento es de 20%, entonces:
$P_C = 75 - 20\%(75) = 80\%(75) = 60$ soles

También: $P_V = P_C + G$
Por dato: $P_V = 80$ soles (5 artículos) $\Rightarrow$ 16 soles (1 artículo)
Además: $80 = 60 + G \Rightarrow G = 20$ soles

Si gana S/.20 por los 5 artículos, entonces por 1 artículo gana $\frac{S/.20}{5} = S/.4$

Por lo tanto:
1 artículo lo vende a S/.16

Por 1 artículo gana S/.4 $\Rightarrow \frac{4}{16}\times 100\% = 25\%$

$\therefore$ El porcentaje de ganancia del precio de venta es: 25%

4 Un vendedor fija el precio de un libro recargando el x% del precio de costo, pero al venderlo hace una rebaja del y%. Si el vendedor no ganó ni perdió, ¿de cuánto fue la rebaja?

Resolución:

Sean:
P_C: precio de costo del libro
P_F: precio fijado del libro
P_V: precio de venta del libro

Del enunciado:
$P_F = P_C + x\%P_C = (100 + x)\%P_C$
$P_V = P_F - y\%P_F = (100 - y)\%P_F$
Además: $P_V = P_C$

Reemplazamos:

$$(100 - y)\%P_F = P_C$$

$$(100 - y)\%(100 + x)\%P_C = P_C$$

$$100 - y = \frac{10\,000}{100 + x}$$

$$\therefore y = \frac{100x}{100 + x}$$

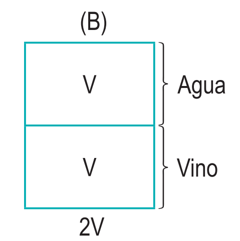
5 Dos recipientes A y B contienen vino. El recipiente A está lleno en dos tercios de su volumen y el recipiente B está lleno hasta la mitad. Si se completan las capacidades de A y B con agua vertiéndose las mezclas en un tercer recipiente C, determina el tanto por ciento de vino que contiene la mezcla en C, sabiendo que la capacidad de B es el doble que la de A.

Resolución:

Sean:
V: volumen del recipiente A V_B: volumen del recipiente B
Del enunciado: $V_B = 2V$

Entonces:

(A)
Agua $\left\{ \frac{V}{3} \right.$
Vino $\left\{ \frac{2}{3}V \right.$
V



En el recipiente C:

Agua $\left\{ \frac{V}{3} + V \right.$
Vino $\left\{ \frac{2}{3}V + V \right.$
3V

Piden: $\left(\frac{\frac{2V}{3} + V}{3V}\right)\times 100\% = \frac{5}{9}\times 100\% = 55,\widehat{5}\%$

ESTADÍSTICA

Observación

Originalmente la palabra "estadística" deriva del vocablo "estado", ya que la función tradicional de los gobiernos centrales es y ha sido llevar la cuenta de habitantes, nacimientos, defunciones, empleo, desempleo y muchas otras características de la sociedad.

Atención

Población

Muestra

Nota

Debes tener en cuenta que una variable estadística es una característica de la población que interesa al investigador.

¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

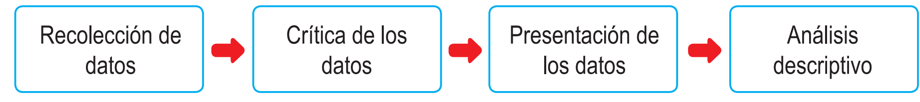
La estadística es la disciplina que diseña los procedimientos para la obtención de los datos y proporciona las herramientas que permiten extraer la información de estas.

CLASES DE ESTADÍSTICA

La estadística puede dividirse en dos amplias ramas: estadística descriptiva y estadística inferencial.

Estadística descriptiva

Es la parte de la estadística que se encarga de la recolección, clasificación, descripción y simplificación de los datos. En otras palabras, podemos decir que un estudio estadístico se considera descriptivo cuando solo se pretende analizar y describir los datos.



Estadística inferencial

La estadística inferencial es el conjunto de técnicas y métodos que son usados para sacar conclusiones generales acerca de una población usando datos de una muestra tomada de ella.

CONCEPTOS USADOS EN ESTADÍSTICA

Población

Es el conjunto de todos los individuos o elementos (personas, objetos, animales, etc.) que posean información sobre el fenómeno que se estudia.

Ejemplo:
Se estudia el precio de la vivienda en una ciudad, entonces la población será todas de las viviendas de dicha ciudad.

Muestra

Es el subconjunto que se ha seleccionado de una población.

Ejemplo:
Si se estudia el precio de la vivienda de una ciudad, lo normal será no recoger información sobre todas las viviendas de la ciudad, lo cual sería una labor muy compleja, por lo que se procederá a seleccionar un subgrupo (muestra) que sea lo suficientemente representativa.

Variables estadísticas

Una variable es una característica observable que varía entre los diferentes individuos de una población. La información que disponemos de cada individuo es resumida en variables.

Clasificación

1. Variable cualitativa

Los valores de las observaciones quedan expresados por características o cualidades de la población. A su vez se clasifica en:

- **Variable cualitativa nominal.** Cuando se definen categorías y no llevan ninguna ordenación en las posibles modalidades.

  Ejemplos: estado civil, color preferido, partidos políticos, etc.

- **Variable cualitativa ordinal.** Cuando más allá de la clasificación, se busca ordenar los casos en términos del grado que poseen cada característica.

  Ejemplos: nivel de educación alcanzado, nivel socioeconómico, etc.

2. Variable cuantitativa

Son aquellas variables que toman valores numéricos (cuantificables) y, en consecuencia, son ordenables. A su vez las variables cuantitativas se subdividen en dos tipos:

- **Variables discretas.** Son aquellas variables que se obtienen por el procedimiento de conteo (toman valores naturales).

  Ejemplos: número de hijos, número de monedas que una persona lleva en el bolsillo, etc.

- **Variables continuas.** Son aquellas variables que pueden tomar cualquier valor de un cierto intervalo (entre dos números fijados).

  Ejemplos: peso, estatura, temperatura, etc.

Dato estadístico
Es un valor particular de la variable, el cual ha sido recopilado como resultado de observaciones. Estos pueden ser comparados y analizados.

Ejemplos:
- Número de hijos: 0; 1; 2; ...
- Estatura de alumnos de una I. E.: 1,75; 1,65; 1,50; ...

Parámetro
Es una cantidad numérica calculada que se usa para describir alguna característica de una población.

Ejemplo: la estatura promedio de los individuos de un país.

Censo
Es un listado de una o más características de todos los elementos de una población. En el Perú los censos poblacionales se realizan aproximadamente cada 10 años.

Encuesta
Es un listado de una o más características de todos los elementos de una muestra.

ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

Planificación
La planificación no se realizará adecuadamente si antes no se ha definido claramente la naturaleza y los objetivos de la investigación así como la evaluación de los conocimientos que se tienen sobre el problema y de las hipótesis que se han formulado para explicarlo.

1. Planteamiento del problema.
2. Determinación de los objetivos de la investigación (formulación de hipótesis).
3. Fundamentación e importancia de la investigación.
4. Identificación de la unidad de análisis y variables.
5. Identificación de las fuentes de información.

Recolección de datos
Consiste en la recolección, clasificación y análisis de la información recogida según lo planificado.

Organización de datos
Es la etapa que implica la revisión cuidadosa de la información recogida para resumirla y presentarla convenientemente. Se consideran los siguientes aspectos:

- Revisión y corrección de la información recogida, en esta etapa es llamada: consistencia.
- Presentación de la información mediante cuadros, tablas y gráficos.

Análisis e interpretación de resultados
En esta etapa se interpreta y compara los resultados de los indicadores estadísticos o estadígrafos. Si el estudio fue realizado conforme a lo que se había planificado y con los resultados a la vista se concluirá si las hipótesis han sido verificadas o no, proponiéndose las recomendaciones pertinentes.

Resultados y conclusiones
Finalmente, se exponen los principales resultados de acuerdo a los objetivos, indicando lo más importante.

PRESENTACIÓN DE DATOS

Hay dos formas de presentar los datos estadísticos:

1. En forma tabular: cuadros y tablas de frecuencia.
2. Mediante gráficos y diagramas.

Recuerda

Una variable cuantitativa se obtiene como resultado de mediciones o conteos.

Observación

El objetivo de una investigación es hallar respuestas a determinadas interrogantes a través de la aplicación de procedimientos científicos. Para esto, primero debemos definir, examinar, valorar y analizar críticamente el problema, para luego formular y entender su solución.

Atención

Para la recolección de datos existen diversas técnicas que dependen de la naturaleza del objeto de estudio, de las posibilidades de acceso a los elementos investigados, del tamaño de la población o muestra, de los recursos y de la oportunidad de obtener los datos.

Nota

Fundamentalmente se usa la forma tabular, los gráficos se utilizan complementariamente para ilustrar mediante figuras, el comportamiento de las variables.

Cuadro estadístico

Consta de ocho partes: número de cuadro, título, concepto o encabezamiento, cuerpo del cuadro, nota de pie de páginas o llamadas, fuente, nota de unidad de medida y elaboración.

Ejemplo:

CUADRO 1
Perú: bienes de consumo duradero del hogar, por área de residencia, 2000 y 2011
(Porcentaje)

Bienes de consumo específicos	Total 2000	Total 2011	Área de residencia	
			Urbano	Rural
Radio	84,5	80,0	87,4	82,9
Televisor	68,1	79,7	93,4	46,2
Teléfono residencial	23,6	27,1	37,4	2,7
Refrigerador	35,9	43,6	59,1	8,5
Computadora	5,9	22,9	32,2	2,1
Bicicleta	22,0	20,3	25,7	19,4
Motocicleta	2,4	11,4	11,9	10,2
Carro/camión	10,2	10,9	13,9	4,1
Bote con motor	-	0,5	0,4	0,9
Número de hogares	28 000	20 328	18 325	8203

Fuente: INEI – Encuesta Demográfica y de Salud Familiar (ENDES)

Observación

De la tabla de frecuencia:

X_i	f_i	h_i	F_i	H_i
X_1	f_1	h_1	F_1	H_1
X_2	f_2	h_2	F_2	H_2
X_3	f_3	h_3	F_3	H_3
X_4	f_4	h_4	F_4	H_4
	n			

Se cumple:

- $h_1 = \frac{f_1}{n}$; $h_2 = \frac{f_2}{n}$; $h_3 = \frac{f_3}{n}$; $h_4 = \frac{f_4}{n}$
- $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$
- $F_1 = f_1$
  $F_2 = f_1 + f_2 = F_1 + f_2$
  $F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = F_2 + f_3$
  $F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = F_3 + f_4$
- $H_1 = h_1$
  $H_2 = h_1 + h_2 = H_1 + h_2$
  $H_3 = h_1 + h_2 + h_3 = H_2 + h_3$
  $H_4 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = H_3 + h_4$

Tablas estadísticas

Llamadas también tablas de frecuencia; son aquellas que presentan la distribución de un conjunto de datos previamente tabulados, los cuales están agrupados o clasificados en las diversas categorías o variables.

Elementos

Rango (R). Llamado también "recorrido de la variable"; es igual a la diferencia entre el mayor y el menor de los valores que forman las variables estadísticas.

$$R = X_{máx.} - X_{mín.}$$

Frecuencia absoluta (f_i). Es el número de veces que aparece repetida la variable estadística en el conjunto de observaciones realizadas.

Frecuencia relativa (h_i). Es el cociente entre la frecuencia absoluta de un dato y el número de observaciones realizadas.

Frecuencia absoluta acumulada (F_i). Resulta de acumular sucesivamente las frecuencias absolutas.

Frecuencia relativa acumulada (H_i). Resulta de acumular o sumar las frecuencias relativas.

Observación

La tabla de frecuencia:

X_i	f_i
X_1	f_1
X_2	f_2
X_3	f_3
X_4	f_4
X_5	f_5

es simétrica si: $f_1 = f_5 \wedge f_2 = f_4$

TABLAS DE FRECUENCIA PARA VARIABLES CUANTITATIVAS

Realizadas las observaciones o recopilación de datos, denotamos la variable por X y los datos por: X_1; X_2; X_3; ...; X_n, donde X_i representa la i–ésima observación de la variable, donde n es el número de observaciones realizadas.

En general, para construir una tabla de frecuencia, se requiere realizar dos operaciones:

1. **La clasificación,** que consiste en determinar las categorías y los distintos valores que toman las variables o los intervalos de clase.
2. **La tabulación,** que consiste en distribuir los elementos de la población en la respectiva categoría o intervalo de la variable.

Tablas de frecuencia de variables discretas

Ejemplo:

Los siguientes datos corresponden al número de hermanos de cada uno de los 20 empleados de una pequeña empresa.

3	4	5	4	6	5	6	3	3	4
5	6	4	5	6	6	5	5	6	5

n.° de observaciones: n = 20

Variable:
X_i = n.° de hermanos

$X_1 = 3$	$X_2 = 4$	$X_3 = 5$	$X_4 = 4$	$X_5 = 6$	$X_6 = 5$	$X_7 = 6$	$X_8 = 3$	$X_9 = 3$	$X_{10} = 4$
$X_{11} = 5$	$X_{12} = 6$	$X_{13} = 4$	$X_{14} = 5$	$X_{15} = 6$	$X_{16} = 6$	$X_{17} = 5$	$X_{18} = 5$	$X_{19} = 6$	$X_{20} = 5$

Clasificación:

X_i: 3; 4; 5; 6 $\qquad X_{mín.} = 3 \qquad X_{máx.} = 6$

Tabulación:

CUADRO 2
Distribución del número de hermanos de cada uno de los 20 empleados de una pequeña empresa

n.° de hermanos	Conteo	f_i	F_i	h_i	H_i
3	III	3	3	0,15	0,15
4	IIII	4	7	0,20	0,35
5	~~IIII~~ II	7	14	0,35	0,70
6	~~IIII~~ I	6	20	0,30	1
Fuente: propia		n = 20		1	

Atención

Si los datos toman valores racionales, se acostumbra a presentarlos utilizando intervalos de clase en las tablas de frecuencia.

Tablas de frecuencia de variables continuas

Ejemplo:
Los siguientes datos corresponden a los sueldos semanales (en soles) de 40 empleados de la empresa Carlitos S. A.

210	550	600	310	571	320	501	511	503	683
410	615	470	569	652	430	520	522	450	590
425	625	645	230	661	780	537	679	740	694
639	540	481	440	799	380	580	716	392	460

n.° de observaciones: n = 40
Variable: X = sueldos semanales

1. Determinamos el valor mínimo y máximo de X para luego hallar el rango (R).

$X_{mín.} = 200 \qquad X_{máx.} = 800$

2. Hallamos el número de intervalos (K), para esto podemos emplear la regla de Sturges:

$$K = 1 + 3{,}322\log(n)$$

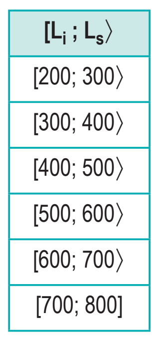
Para el ejemplo: $K = 1 + 3{,}322 \times \log(40) = 6{,}32 \approx 6$

3. Determinamos la amplitud de los intervalos (c), de la siguiente manera:

$$c = \frac{X_{máx.} - X_{mín.}}{K}$$

Para el ejemplo: $c = \frac{800 - 200}{6} = 100$

4. Construimos los intervalos:



$[L_i ; L_s\rangle$
$[200; 300\rangle$
$[300; 400\rangle$
$[400; 500\rangle$
$[500; 600\rangle$
$[600; 700\rangle$
$[700; 800]$

5. Se calcula el punto medio de cada intervalo, llamado marca de clase (x_i), para finalmente organizarlas en una tabla.

I_i	x_i	
$[200; 300\rangle$	250	← $\frac{200 + 300}{2}$
$[300; 400\rangle$	350	← $\frac{300 + 400}{2}$
$[400; 500\rangle$	450	← $\frac{400 + 500}{2}$
$[500; 600\rangle$	550	← $\frac{500 + 600}{2}$
$[600; 700\rangle$	650	← $\frac{600 + 700}{2}$
$[700; 800]$	750	← $\frac{700 + 800}{2}$

Nota

El número de intervalos (K) es arbitrario, sin embargo es recomendable tener en cuenta ciertos criterios:
- Naturaleza de la variable.
- Número de valores observados.
- El recorrido de la variable.
- Unidad de medida de la variable.
- Los objetivos del estudio.

Ten en cuenta

La marca de clase x_i, es el punto medio de cada intervalo.

6. Finalmente realizamos la tabulación:

CUADRO 3
Distribución de los sueldos semanales de 40 empleados de la empresa Carlitos S. A.

I_i	x_i	Conteo	f_i	F_i	h_i	H_i
[200; 300⟩	250	II	2	2	0,05	0,05
[300; 400⟩	350	III	3	5	0,075	0,125
[400; 500⟩	450	~~IIII~~ III	8	13	0,20	0,325
[500; 600⟩	550	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13	26	0,325	0,65
[600; 700⟩	650	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	36	0,25	0,90
[700; 800]	750	IIII	4	40	0,10	1
Fuente: propia			n = 40		1	

Nota
En la tabulación se contabilizan cuántos elementos se encuentran comprendidos en cada intervalo.

TABLAS DE FRECUENCIA PARA VARIABLES CUALITATIVAS

En el caso de variables cualitativas no se pueden calcular las frecuencias acumuladas, pues no es posible ordenar de menor a mayor datos no numéricos.

Ejemplo:
Los siguientes datos corresponden a los estados civiles de 20 personas encuestadas.

S	C	C	S	V	D	D	S	C	S
D	S	C	C	S	C	S	S	C	S

Donde:
S: soltero, C: casado, D: divorciado, V: viudo

Como resultado de la clasificación y tabulación, se tiene:

CUADRO 4
Distribución de los estados civiles de 20 personas encuestadas

Estado civil	f_i	h_i
Soltero	9	0,45
Casado	7	0,35
Divorciado	3	0,15
Viudo	1	0,05
Fuente: propia	n = 20	1

Observación
En una tabla de frecuencias se cumple:
$H_K = 1 \wedge F_K = n$
Donde K es el número de intervalos.

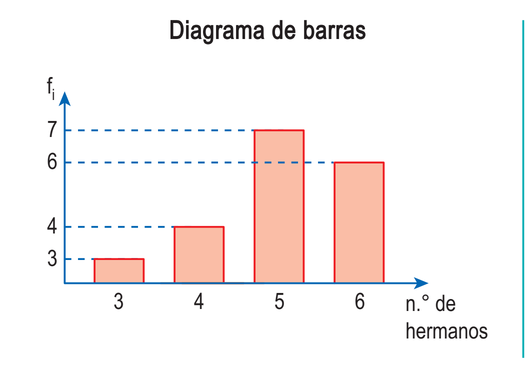
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Un gráfico estadístico es la representación de un fenómeno estadístico por medio de figuras geométricas.

Atención
Un gráfico es un auxiliar de un cuadro estadístico, no lo sustituye sino que lo complementa.

Representación gráfica de variables cuantitativas

Diagrama de barras



Histograma

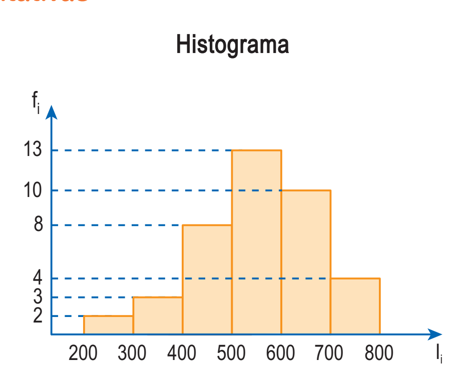
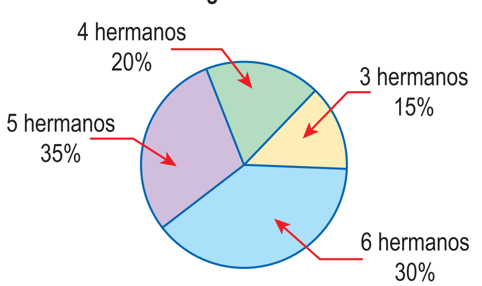


Diagrama circular



Pictograma

Si [figura] = un empleado, entonces:

Empleados con 3 hermanos: [figura] [figura] [figura]

Empleados con 4 hermanos: [figura] [figura] [figura] [figura]

Empleados con 5 hermanos: [figura] [figura] [figura] [figura] [figura] [figura] [figura]

Empleados con 6 hermanos: [figura] [figura] [figura] [figura] [figura] [figura]

Representación gráfica de variables cualitativas

Diagrama de barras

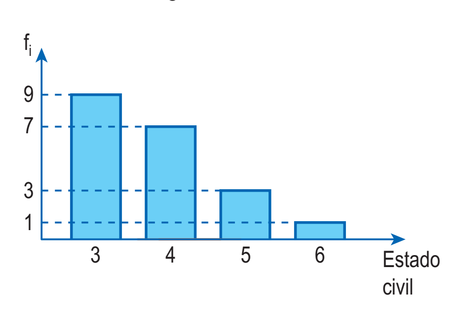
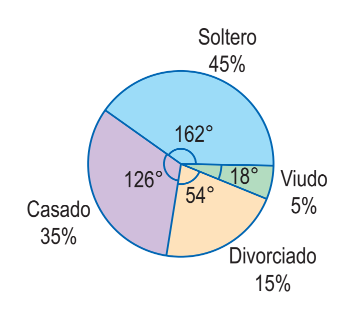


Diagrama circular



Recuerda

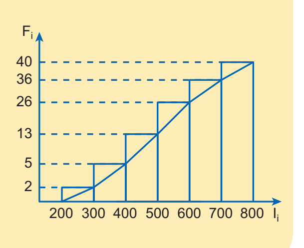
Para variables discretas se usan:

- Diagrama de barras
- Diagrama circular
- Pictograma

Para variables continuas se usan

- Histograma
- Ojiva de datos

Esta última se grafica para el ejemplo del cuadro 3:



MEDIDAS DE POSICIÓN

Media aritmética ($\overline{X}$)

a) Para datos no clasificados

Sean los datos: $d_1; d_2; d_3; ...; d_n$

$$\overline{X} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

b) Para datos clasificados

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$$

Donde:

k: n.° de intervalos de clase i.

f_i: frecuencia absoluta de la clase i.

x_i: marca de clase de la clase i.

h_i: frecuencia relativa de la clase i.

Atención

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

En general:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

Mediana (Me)

a) Para datos no clasificados

Si se tiene un número impar de datos la mediana será igual al valor el término central; y, si se tiene un número par de datos la mediana será igual a la semisuma de los dos términos centrales.

Ejemplo:

Si se tienen los datos:
5; 8; 7; 9; 6; 5; 4

Ordenando los datos:
4; 5; 5; (6); 7; 8; 9

Como n = 7, se tiene: Me = 6

b) Para datos clasificados

$$Me = L_m + c \times \left[\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right]$$

Donde:

L_m: límite inferior de la clase mediana.

c: amplitud de la clase mediana.

n: número de datos.

F_{i-1}: frecuencia absoluta acumulada de la clase que precede a la clase mediana.

f_i: frecuencia absoluta de la clase mediana.

Recuerda

Para ubicar la clase mediana, n/2 debe encontrarse en la clase que la contenga.

Debes tener en cuenta que la mediana utiliza menos información que la media, ya que solo depende del orden de los datos, pero su mayor ventaja es que no se ve influida por los valores externos. Además, la relación entre $\overline{X}$ y Me va a determinar la simetría de la distribución. Así tenemos, que si $\overline{X}$ = Me, la distribución es simétrica, de lo contrario la distribución será asimétrica.

Moda (Mo)

a) Para datos no clasificados

Ejemplo:

Se tienen los datos: 5; 8; 7; 9; 6; 5; 4

En este caso, la moda es 5, pues es el valor del dato que se repite con mayor frecuencia.

b) Para datos clasificados

$$Mo = L_o + c \times \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

Donde:

L_o: límite inferior de la clase modal.

c: amplitud de la clase modal.

d_1: diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente.

d_2: diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente.

Nota

Para ubicar la clase modal se busca el intervalo de clase con la mayor frecuencia absoluta.

Atención

El intervalo de clase mediana, es aquel intervalo cuya frecuencia relativa acumulada sea igual o exceda a 0,5.

Ejemplo:

Se tienen los siguientes datos clasificados:

I_i	f_i
[30; 40⟩	4
[40; 50⟩	8
[50; 60⟩	10
[60; 70⟩	12
[70; 80]	6

Halla: $\overline{X}$, Me y Mo

Resolución:

I_i	x_i	f_i	F_i	
[30; 40⟩	35	4	4	
[40; 50⟩	45	8	12	
[50; 60⟩	55	10	22	← Me
[60; 70⟩	65	12	34	← Mo
[70; 80]	75	6	40	
		n = 40		

Calculamos $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{35 \times 4 + 45 \times 8 + 55 \times 10 + 65 \times 12 + 75 \times 6}{40} = \frac{2280}{40} = 57$$

Calculamos Me:

$\frac{n}{2} = 20$; $L_m = 50$; $F_{i-1} = 12$; $f_i = 10$; $c = 10$

$$\Rightarrow Me = 50 + 10\left(\frac{20 - 12}{10}\right) = 58$$

Calculamos Mo:

$d_1 = 12 - 10 = 2$; $L_o = 60$; $c = 10$

$d_2 = 12 - 6 = 6$

$$\Rightarrow Mo = 60 + 10\left(\frac{2}{6 + 2}\right) = 62,5$$

Ten en cuenta

La moda (Mo) no siempre existe y no siempre es única.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Varianza (σ^2)

a) Para datos no clasificados

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum X_i^2}{n} - \overline{X}^2$$

Donde:

X_i: i-ésima observación

$\overline{X}$: media aritmética

n: total de datos

b) Para datos clasificados

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \overline{X}^2$$

Donde:

f_i: frecuencia absoluta de la clase i

x_i: marca de clase de la clase i

$\overline{X}$: media aritmética

n: total de datos

Nota

La desviación estándar es una medida de dispersión que se calcula así:

a) Para datos no agrupados

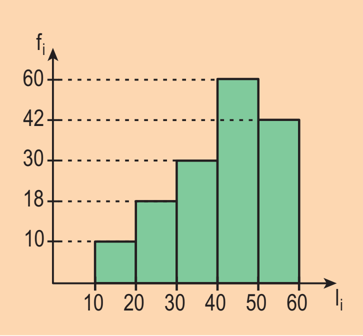
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n}}$$

b) Para datos agrupados

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{n}}$$

Problemas resueltos

1 Dado el histograma, calcula la moda.



Resolución:

De los datos del histograma construimos nuestra tabla de frecuencias:

I_i	f_i
[10; 20⟩	10
[20; 30⟩	18
[30; 40⟩	30
[40; 50⟩	60
[50; 60]	42

Mo ⟶ [40; 50⟩

Sabemos: $Mo = L_o + c\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$

Donde:

$L_o = 40$

$c = 50 - 40 = 10$

$d_1 = 60 - 30 = 30$

$d_2 = 60 - 42 = 18$

Reemplazando en la fórmula:

$Mo = 40 + 10 \cdot \left[\frac{30}{30 + 18}\right]$

$Mo = 40 + 10(0{,}625) \Rightarrow Mo = 46{,}25$

2 Se tiene la distribución de los sueldos mensuales en dólares de los empleados de una industria. ¿Qué porcentaje gana 135 dólares o más?

Clases	Frecuencias
menos de 45	15
45 a menos de 90	20
90 a menos de 135	36
135 a menos de 200	58
200 a menos de 300	82
300 a menos de 345	11
345 a más	3

Resolución:

Tenemos: $n = \sum_{i=1}^{7} f_i = 225$

Ganan $135 o más:

$58 + 82 + 11 + 3 = 154$ empleados

∴ El porcentaje será: $\frac{154}{225} \times 100\% = 68{,}\widehat{4}\%$

3 En el siguiente cuadro se muestra la distribución de edades de un cierto número de personas.

Calcula: x + y + z

I_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	80			
[30; 40⟩	40	0,25		z
[40; 50⟩		0,15	y	
[50; 60]	x			

Resolución:

Intervalos	f_i	h_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	80	0,5	80	0,5
[30; 40⟩	40	0,25	120	z
[40; 50⟩	a	0,15	y	
[50; 60]	x			

Sea n el número de observaciones:

Del enunciado se tiene: $h_2 = 0{,}25 = \frac{40}{n} \Rightarrow n = 160$

También se cumple: $h_3 = \frac{f_3}{n} \Rightarrow 0{,}15 = \frac{a}{160} \Rightarrow a = 24$

Luego:

- $x + a + 40 + 80 = 160$

  $x + 24 + 120 = 160 \Rightarrow x = 16$

- $h_1 = \frac{80}{160} = 0{,}5$

  $y = 120 + a \Rightarrow y = 144$

  $z = 0{,}5 + 0{,}25 \Rightarrow z = 0{,}75$

$\therefore x + y + z = 16 + 144 + 0{,}75 = 160{,}75$

4 Dado el siguiente cuadro, determina la moda.

I_i	f_i
[0; 40⟩	3
[40; 80⟩	8
[80; 120⟩	4
[120; 160⟩	9
[160; 200]	6

Resolución:

Sabemos:

$Mo = L_o + c\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$

Observamos en la tabla que la mayor cantidad de datos se presenta en la 4.ª fila ($f_4 = 9$):

- $d_1 = f_4 - f_3$ ∧ $d_2 = f_4 - f_5$

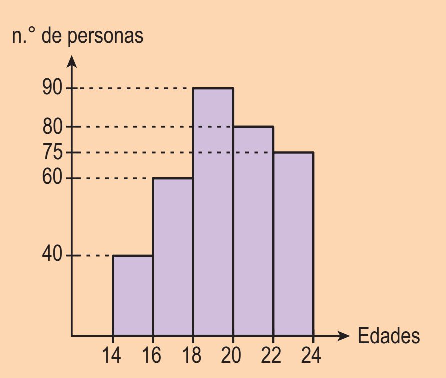
  $d_1 = 9 - 4 = 5$ $d_2 = 9 - 6 = 3$

  $L_o = 120$; $c = 160 - 120 = 40$

Reemplazando, se tiene: $Mo = 120 + 40\left[\frac{5}{5 + 3}\right]$

$Mo = 120 + 25 \Rightarrow Mo = 145$

5 Se hizo una encuesta en un auditorio sobre el número de personas que postulan a medicina y se las clasificó por edades. Luego se hizo el siguiente histograma.



Determina el tamaño de la muestra.

Resolución:

Sea la muestra: n

$n = 40 + 60 + 90 + 80 + 75$

$\therefore n = 345$

6 En un salón las notas de 8 alumnos fueron:
7; 7; 9; 9; 12; 13; 13; 14
Halla la varianza

Resolución:

Hallamos la media:

$$\overline{X} = \frac{7+7+9+9+12+13+13+14}{8} = 10,5$$

Hallamos la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{8}(938) - (10,5)^2$$

$\therefore \sigma^2 = 7$

7 En una empresa donde el sueldo medio es de \$400 se incrementa un personal igual al 25% del ya existente con un sueldo medio igual al 60% de los antiguos. Si 3 meses más tarde se incrementa cada sueldo en 20% más \$30, ¿cuánto es el nuevo salario medio?

Resolución:

Hallamos el sueldo promedio de la empresa, luego de que se incrementa a su personal:

	n.° de trabajadores	Sueldo
Antiguos	100	400
Nuevos	25	60%(400) = 240

$$\text{Sueldo medio} = \frac{100 \,.\, 400 + 25 \,.\, 240}{125} = \$368$$

Dentro de 3 meses (cada sueldo se incrementa 20% más \$30)

Nuevo sueldo promedio = 120%(368) + 30

= \$471,6

8 En la siguiente tabla de distribución de ancho de clase constante. Calcula: $R + f_3 + f_4 + x_4$

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i
[; 〉		4		
[16; 〉				
[; 24〉			28	0,2
[;]				

Además, la mediana es 20 y R es el rango.

Resolución:

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	
[12; 16〉		4	4		
[16; 20〉		a	a + 4		
[20; 24〉		b	28	0,2	← Me
[24; 28]		12	n = 40		
		n			

- $R = 28 - 12 = 16$
- $x_4 = \dfrac{24+28}{2} = 26$
- $a + b = 24$ ...(I)

Como $Me = 20 \in [20; 24\rangle$, entonces:

$$Me = 20 + 4\left[\frac{\frac{n}{2} - (a+4)}{b}\right] = 20$$

$\Rightarrow a = \dfrac{n}{2} - 4$

Además: $b = 0,2n$

Reemplazando a y b en (I):

$0,7n = 28$

$n = 40$

$\Rightarrow b = 8$

Piden: $R + f_3 + f_4 + x_4$

$16 + 8 + 12 + 26 = 62$

9 En un cuadro de distribución de 4 intervalos de igual ancho de clase se sabe que: $x_1 = 12$, $x_3 = 28$, $f_2 = 45$, $h_1 = h_3 = 0,25$. Si en total hay 120 datos. Calcula su media.

Resolución:

x_i	f_i	h_i
12	a = 30	0,25
d = 20	45	0,375
28	b = 30	0,25
e = 36	c = 15	0,125
Total	120	1

$h_2 = \dfrac{45}{120} = 0,375 \Rightarrow h_4 = 0,125$

$\dfrac{a}{n} = h_1 \Rightarrow \dfrac{a}{120} = 0,25 \Rightarrow a = 30$

$\dfrac{b}{120} = h_3 \Rightarrow \dfrac{b}{120} = 0,25 \Rightarrow b = 30$

$\dfrac{c}{120} = 0,125 \Rightarrow c = 15$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i f_i}{n} = \frac{12 \,.\, 30 + 20 \,.\, 45 + 28 \,.\, 30 + 36 \,.\, 15}{120}$$

$\therefore \overline{X} = 22$

10 Dado el siguiente cuadro, determina la mediana.

I_i	f_i	F_i
[20; 30⟩	2	2
[30; 40⟩	4	6
[40; 50⟩	5	11
[50; 60⟩	6	17
[60; 70]	3	20

Resolución:

Determinamos primero el intervalo de la clase mediana:

	I_i	f_i	F_i	H_i
	[20; 30⟩	2	2	0,10
	[30; 40⟩	4	6	0,30
Me →	[40; 50⟩	5	11	0,55
	[50; 60⟩	6	17	0,85
	[60; 70]	3	20	1,00
		n = 20		

Sabemos:

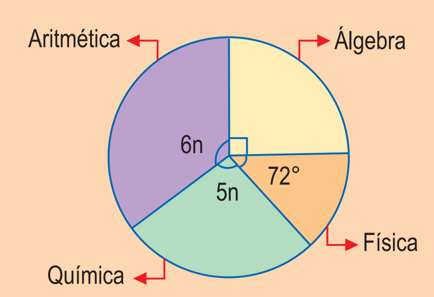
$$Me = L_m + c\left[\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}\right]$$

Reemplazando, tenemos:

$$Me = 40 + 10\left[\frac{\frac{20}{2} - 6}{5}\right]$$

$Me = 40 + 8 \Rightarrow Me = 48$

11 El siguiente gráfico muestra las preferencias de un grupo de alumnos sobre los cursos de Aritmética, Álgebra, Física y Química. Determina cuántos prefieren Aritmética, si los que prefieren Álgebra son 100 personas.



Resolución:

Del gráfico:

$6n + 5n + 72° + 90° = 360°$

$11n + 162° = 360°$

$11n = 198° \Rightarrow n = 18°$

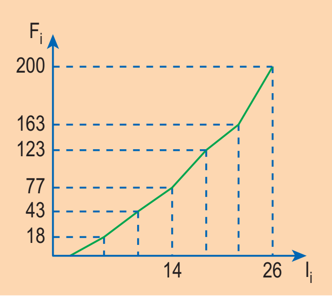
Sea a el número de alumnos que prefieren Aritmética. Entonces:

a — 6n = 108°

100 — 90°

$\Rightarrow a = \dfrac{100 . 108°}{90°} = 120$

12 La siguiente ojiva de datos corresponde a la frecuencia acumulada de las puntuaciones obtenidas por los trabajadores de una empresa en un test. ¿Qué tanto por ciento de los trabajadores tuvo una puntuación desde 12 hasta 19? Halla Me y Mo, además asuma amplitud constante.



Resolución:

Del enunciado, la amplitud (c) es constante en los intervalos; se tiene:

[14; 14 + c⟩ $\Rightarrow 26 - (14 + 2c) = c$

[14 + c; 14 + 2c⟩ $26 - 14 - 2c = c$

[14 + 2c; 26⟩ $12 = 3c \Rightarrow c = 4$

Elaboramos la tabla de frecuencia y la completamos a partir de la ojiva de datos:

I_i	f_i	F_i	
[2; 6⟩	18	18	
[6; 10⟩	25	43	
[10; 14⟩	34	77	
[14; 18⟩	46	123	← Me y Mo
[18; 22⟩	40	163	
[22; 26⟩	37	200	
	200		

$\dfrac{n}{2} = \dfrac{200}{2} = 100$

Calculando Me:

$$Me = L_m + c\left(\frac{\frac{n}{2} - F_i}{f_i}\right)$$

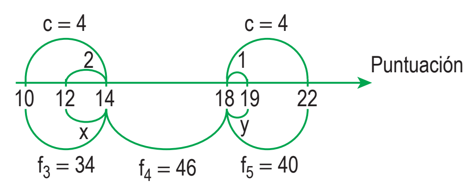
Reemplazando: $Me = 14 + 4\left(\dfrac{100 - 77}{46}\right) = 16$

Calculando Mo: $Mo = L_o + c\left(\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$

Entonces: $d_1 = 46 - 34 = 12$; $d_2 = 46 - 40 = 6$

Reemplazando, se tiene: $Mo = 14 + 4\left(\dfrac{12}{12 + 6}\right) = 16,\widehat{6}$

Luego, para hallar la cantidad de trabajadores que obtuvieron una puntuación desde 12 hasta 19, se realiza el siguiente procedimiento:



Se plantea la proporción: $\dfrac{x}{f_3} = \dfrac{2}{c} \wedge \dfrac{y}{40} = \dfrac{1}{c} \Rightarrow \dfrac{x}{34} = \dfrac{2}{4} \wedge \dfrac{y}{40} = \dfrac{1}{4}$

Luego: x = 17; y = 10

Nos piden: $17 + 46 + 10 = 73 \Rightarrow \dfrac{73}{200} \times 100\% = 36,5\%$

∴ 36,5% de los trabajadores obtuvieron una puntuación desde 12 hasta 19.

ANÁLISIS COMBINATORIO

Observación

Sean $S_1 = \{a_1; a_2; ...; a_{n_1}\}$ un conjunto de n_1 elementos, $S_2 = \{b_1; b_2; ...; b_{n_2}\}$ un conjunto de n_2 elementos, ..., $S_r = \{x_1; x_2; ...; x_{n_r}\}$ un conjunto de n_r elementos. Entonces, es posible formar:

$$n = n_1 \times n_2 \times ... \times n_r$$

grupos ordenados, con r elementos de cada grupo $(a_{j_1}; b_{j_2}; ...; x_{j_r})$, donde a_{j_1} es un elemento de S_1, b_{j_2} un elemento de S_2, ..., x_{j_r} un elemento de S_r.

En el análisis combinatorio se desarrolla las nociones básicas de la teoría matemática que estudia las diferentes técnicas de conteo.

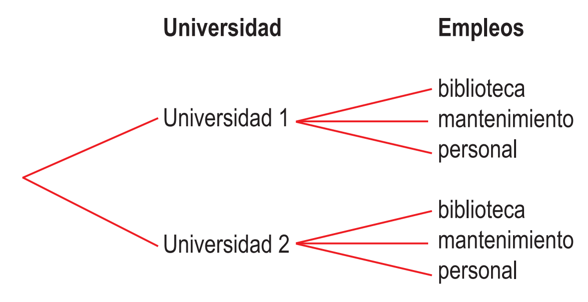
PRINCIPIOS BÁSICOS DEL PROCESO DE CONTEO

Principio de multiplicación

Sea $A = \{a_1; a_2; ...; a_m\}$ un conjunto de m elementos y $B = \{b_1; b_2; ...; b_n\}$ un conjunto de n elementos, entonces el número de pares ordenados que pueden ser formados tomando un elemento de A y un elemento de B es $m \times n$. Dicho de otro modo, si una decisión se puede tomar de m maneras y una vez tomada una de ellas, una segunda decisión es tomada de n maneras, entonces el número de maneras de tomar ambas decisiones es igual a $m \times n$.

Ejemplo:
Si en dos universidades de Lima desean contratar un empleado para cada una de las 3 áreas: biblioteca, mantenimiento y personal, ¿cuántas oportunidades de empleo hay disponibles?

Resolución:
Observamos que hay dos grupos: universidades (2) y tipos de empleo (3).
Entonces, si graficamos:



Observamos que hay $2 \times 3 = 6$ oportunidades disponibles de empleo.

Principio de adición

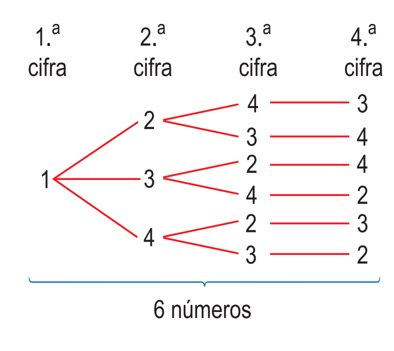
Si dos decisiones son mutuamente excluyentes y la primera se puede tomar de m maneras y la segunda de n maneras, entonces una o la otra se puede tomar de $m + n$ maneras.

Ejemplo:
¿Cuántos números de 4 cifras menores que 2400 se pueden formar con los dígitos 1; 2; 3 y 4, si cada dígito se usa una vez?

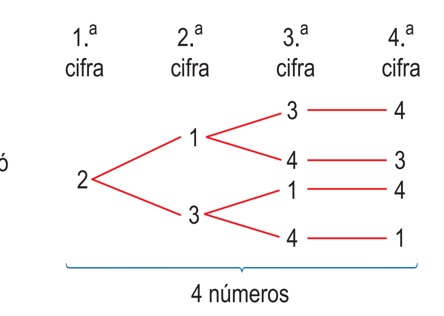
Recuerda

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times n$

Resolución:



ó



Luego, en total hay $6 + 4 = 10$ números menores que 2400, que se pueden formar con los dígitos 1; 2; 3 y 4, donde cada dígito se usa una vez.

ARREGLOS

Arreglos simples

Un arreglo simple de n objetos diferentes tomados de k en k, es una ordenación de k objetos entre los n dados, de tal manera que estos grupos de k elementos difieran en algún elemento o en el orden de colocación.

Teorema
El número de todos los arreglos a formarse con n objetos tomados de k en k es obtenido por la fórmula:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo:
¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar Luis, Vanesa, Andrea, Julio y Roberto en una banca, con capacidad para 3 personas?

Resolución:
Como n = 5 y k = 3, el número total de maneras diferentes que pueden sentarse Luis, Vanesa, Andrea, Julio y Roberto en una banca con capacidad para 3 personas es:

$$A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \times 3 \times 4 \times 5}{2!} = 60$$

Atención

- $n! = n \times (n-1)!$
  $= n \times (n-1) \times (n-2)!$
- $0! = 1$
- $1! = 1$

Arreglos con repetición

Son aquellos arreglos en el que un elemento cualquiera de los dados, puede repetirse en el mismo grupo, el número de veces que se indique.

Teorema
El número de todos los arreglos con repetición a formarse con n objetos tomados de k en k es obtenido por la fórmula:

$$(AR)_k^n = n^k$$

Ejemplo:
Un ómnibus parte de su paradero inicial con 4 personas a bordo y se detiene en 10 paraderos diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden bajar las 4 personas en los 10 paraderos, si en un paradero pueden bajar cualquier número de personas?

Resolución:
La 1.ª persona puede bajar en cualquiera de los 10 paraderos, la 2.ª; 3.ª y 4.ª de igual forma. Entonces el número total de maneras es:

$$(AR)_4^{10} = 10^4 = 10\,000$$

PERMUTACIONES

Son los diferentes grupos que pueden formarse con los n objetos dados, de modo que intervengan todos los elementos en cada grupo y cuya diferencia está dada en el orden de colocación.

Nota

En A_k^n, si k = n, entonces:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n$$

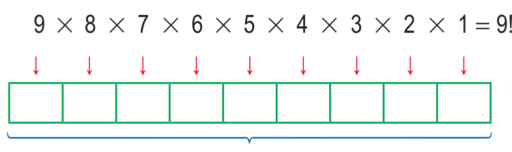
Teorema
El número de permutaciones distintas que pueden formarse con n objetos, se obtiene mediante la fórmula:

$$P_n = n!$$

Ejemplo:
¿De cuántas maneras se pueden ordenar 9 libros en un estante con capacidad para 9 libros?

Resolución:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$$



Lugares en el estante

Observamos que los 9 libros se van a ordenar en 9 lugares distintos, es decir:

$$P_9 = 9!$$

Permutaciones circulares

Son las diferentes permutaciones que pueden formarse con n objetos dados, de modo que no hay ni primer ni último objeto, pues todos se hallan en un círculo cerrado.

Teorema

El número de permutaciones circulares distintas que pueden formarse con n objetos se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$P_n^c = (n-1)!$$

Ejemplo:

¿De cuántas formas pueden sentarse los 12 miembros del consejo de facultad alrededor de una mesa circular?

Resolución:

Considerando uno de los miembros sentado en cualquier parte alrededor de la mesa, entonces los 11 miembros restantes pueden sentarse de $P_{11} = 11!$ maneras, es decir:

$$P_{12}^c = (12-1)! = 11!$$

Nota

- $C_n^n = 1$
- $C_1^n = 1$
- $C_{n-1}^n = n$
- $C_k^n = C_{n-k}^n$
- $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$
- $C_0^n + C_1^n + C_2^n + ... + C_n^n = 2^n - 1$

Permutaciones con repetición

Sean $x_1; x_2; x_3; ...; x_m$; números enteros positivos tal que: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_m = n$

El número de maneras en que un conjunto de n elementos puede ser dividido en m partes ordenadas, de las cuales la primera contiene x_1 elementos, la segunda x_2 elementos, etc., se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$P_n^{x_1; x_2; ...; x_m} = \frac{n!}{x_1! \times x_2! \times ... \times x_m!}$$

Ejemplo:

¿Cuántas permutaciones distintas se pueden formar usando las letras de la palabra MEMES?

Resolución:

Tenemos

$x_1 = 2$ letras M; $x_2 = 2$ letras E; $x_3 = 1$ letra S; $n = 5$ letras

Entonces hay $P_5^{2; 2; 1} = \frac{5!}{2! \times 2! \times 1} = 30$ permutaciones distintas de las letras de la palabra MEMES.

COMBINACIONES

Una combinación de n objetos diferentes tomados de k en k, es una selección de k objetos de los n dados, sin tener en cuenta la ordenación de los mismos.

Teorema

El número de combinaciones de n objetos tomando k cada vez, se obtiene mediante la fórmula siguiente:

$$C_k^n = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Atención

Se cumple:

$$CR_k^n = C_k^{n+k}$$

Ejemplo:

Un repuesto de un televisor se puede adquirir en 7 tiendas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 4 de las 7 tiendas?

Resolución:

El número total de maneras de escoger 4 tiendas de 7 es: $C_4^7 = \frac{7!}{4! \times (7-4)!} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{4! \times 3!} = 35$

Teorema

El número de combinaciones con repetición a formarse con n objetos tomados de k en k se obtiene mediante la fórmula:

$$(CR)_k^n = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \times k!}$$

Ejemplo:

Cada pieza de un dominó es marcado por dos números. Las piezas son simétricas de modo que el par de números no es ordenado. ¿Cuántas piezas de dominó pueden construirse usando los números 1; 2; 3; ...; 20?

Resolución:

Como cada pieza del dominó se puede marcar con dos números repetidos, entonces el número total de piezas de dominó que se pueden construir es:

$$(CR)_2^{20} = \frac{(20+2-1)!}{(20-1)! \times 2!} = \frac{21!}{19! \times 2} = 210$$

Problemas resueltos

1 ¿Cuántas palabras adicionales con sentido o no, se pueden formar con las letras de la palabra EDITORIAL?

Resolución:

Se observa que la letra I se repite 2 veces y las letras E, D, T, O, R, A, L solo una vez cada una.
En este caso, se trata de un ordenamiento con elementos repetidos, entonces:

$$P_9^{2;1;1;1;1;1;1;1} = \frac{9!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!}$$

$$= \frac{9!}{2!} = 181\,440$$

Por lo tanto se, el número de palabras adicionales que se pueden formar es:
$181\,440 - 1 = 181\,439$

2 Se tienen 10 problemas de Aritmética de los cuales hay un problema con gráfico. ¿De cuántas maneras diferentes se podría dejar como tarea 5 problemas a un alumno de modo que siempre se incluya el problema que tenga el gráfico?

Resolución:

Como se quiere que en la tarea conformada por 5 problemas, esté el problema, con gráfico, entonces el problema con gráfico será fijo, y los 4 que faltan se escogerán de los nueve restantes, luego:

$$C_4^9 = \frac{9!}{(9-4)!\times 4!} = \frac{9!}{5!\times 4!} = 126$$

Por lo tanto, se puede dejar la tarea de 126 maneras diferentes.

3 Una de las personas que asistió a una reunión observó que los apretones de manos entre los asistentes fueron 78. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

Resolución:

Si n es el número de personas, cada uno saludó a (n – 1) personas, entonces hubieron $n\times(n-1)$ apretones de mano, pero aquí estamos contando dos veces cada saludo, luego:

$$\frac{n\times(n-1)}{2} = 78$$

$$n\times(n-1) = 13\times 12 \Rightarrow n = 13$$

Otra manera de solucionar este problema es aplicando combinaciones:

$$C_2^n = \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 78$$

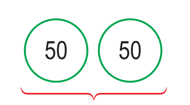
$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{(n-2)!\times 2!} = 78$$

$$\frac{n\times(n-1)}{2} = 78 \Rightarrow n = 13$$

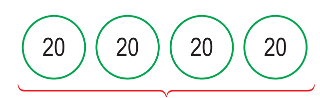
Entonces, el número de personas que asistieron a la reunión fue 13.

4 ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar linealmente 6 monedas, de las cuales 2 son de 50 céntimos y 4 de 20 céntimos?

Resolución:



2 monedas



4 monedas

Se observa que es una permutación con elementos repetidos, entonces las 6 monedas se pueden alinear de $P_6^{2;\,4} = \frac{6!}{2!\times 4!} = 15$ maneras distintas.

5 ¿De cuántas maneras Vilma podrá seleccionar los sabores de un helado, si hay 6 sabores disponibles y ella desea por lo menos 4 sabores?

Resolución:

Dado que al escoger los sabores no importa el orden, entonces usamos combinaciones:

- Para 4 sabores: $C_4^6 = 15$
- Para 5 sabores: $C_5^6 = 6$
- Para 6 sabores: $C_6^6 = 1$

Entonces, el número de maneras es: $C_4^6 + C_5^6 + C_6^6 = 22$

6 ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden forman uniendo solo los 5 vértices de un pentágono?

Resolución:

No importa la manera como se formen los triángulos además para formar cualquier triángulo se necesitan 3 puntos. Se trata de una combinación.

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\times(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!}$$

$$= \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2!} = 10$$

Por lo tanto, se pueden formar 10 triángulos.

7 ¿Cuántos partidos diferentes de tenis dobles mixtos se pueden organizar con 5 hombres y 7 mujeres? Si en cada equipo de dobles mixtos juegan un hombre y una mujer.

Resolución:

El número de maneras en que se puede conformar el primer equipo es: $C_1^5\times C_1^7 = 35$

El número de maneras en que se puede conformar el segundo equipo es: $C_1^4\times C_1^6 = 24$

De acuerdo al principio de multiplicación, se tendría $35\times 24 = 840$, pero en ellos se estaría incluyendo dos veces cada partido, porque una misma pareja puede estar en el primer equipo o en el segundo. Por lo tanto, el número de partidos diferentes que se pueden organizar sería igual a :

$$\frac{C_1^5\times C_1^7\times C_1^4\times C_1^6}{2!} = \frac{840}{2} = 420$$

PROBABILIDADES

Observación

Un experimento es un proceso mediante el cual se obtiene un resultado de una observación.

EXPERIMENTO ALEATORIO

Un experimento es aleatorio, cuando los resultados de la observación no se pueden predecir con exactitud antes de realizar el experimento.

Ejemplos:
- Lanzar una moneda 3 veces y observar el resultado.
- Lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior.

ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral denotado por Ω, es el conjunto de puntos correspondientes a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplos:
Para los experimentos mencionados, se tiene:
Ω_1 = {CCC; CSC; CCS; CSS; SCC; SCS; SSS; SSC}
Ω_2 = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Nota

En particular Ω y ϕ (conjunto vacío) son eventos. Al espacio muestral Ω se le llama evento seguro y a ϕ evento imposible.

EVENTOS

Un evento es un conjunto de posibles resultados de un experimento, en términos de conjuntos. Es un subconjunto del espacio muestral Ω.

Ejemplo:
Al lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior, el espacio muestral asociado a este experimento es:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Para este experimento podemos definir los siguientes eventos:
- A: observar un número impar. $\Rightarrow$ A = {1; 3; 5}
- B: observar un número menor que 4. $\Rightarrow$ B = {1; 2; 3}
- C: observar un número múltiplo de 2. $\Rightarrow$ C = {2; 4; 6}
- D: observar el número 1. $\Rightarrow$ D = {1}

Recuerda

Un evento es simple si contiene un punto del espacio muestral y se denota por ω.

OPERACIONES CON EVENTOS

Usando las operaciones con conjuntos, podemos formar nuevos eventos los cuales serán nuevamente subconjuntos del espacio muestral de los eventos dados.

Unión de eventos

Sean A y B dos eventos cualesquiera de un experimento aleatorio. La unión de estos eventos denotado por $A \cup B$, es el evento que ocurre si A ocurre o B ocurre o ambos ocurren. Sus elementos son listados mediante la regla:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

Nota

La unión de los eventos A y B se puede expresar así:
$A \cup B$ = {el número resulta par o menor que 5}

Ejemplo:
Para el experimento del lanzamiento de un dado, se definen los eventos:
A: observar un número par.
B: observar un número menor que 5.
Lista los elementos del evento: $A \cup B$

Resolución:
Se tiene el espacio muestral: Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
Se tienen los eventos: A = {2; 4; 6} y B = {1; 2; 3; 4}
Entonces, la unión de estos dos eventos es: $A \cup B$ = {1; 2; 3; 4; 6}

Atención

Del ejemplo, la intersección de los eventos A y B se puede expresar así:
$A \cap B$ = {el número resulta par y menor que 5}

Intersección de eventos

Sean A y B dos eventos cualesquiera de un experimento aleatorio. La intersección de A y B es el evento que contiene todos los resultados que pertenecen a A y B simultáneamente. La intersección de A y B se denota por $A \cap B$ y sus elementos son listados por la regla:

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

Ejemplo:
Para el experimento del ejemplo anterior, se tiene: A = {2; 4; 6} y B = {1; 2; 3; 4}. Luego: $A \cap B$ = {2; 4}

Eventos mutuamente excluyentes

Sean A y B dos eventos de un cierto experimento aleatorio, se dice que estos eventos son mutuamente excluyentes (disjuntos), si no pueden ocurrir juntos, esto es:

$$A \cap B = \phi$$

Ejemplo:
Un experimento aleatorio consiste en seleccionar un empleado de una determinada empresa y observar su edad. Sean los eventos:
A: el empleado seleccionado al azar tiene más de 24 años.
B: el empleado seleccionado al azar tiene menos de 22 años.
Se observa que $A \cap B = \phi$, es decir, los eventos A y B son mutuamente excluyentes.

Complemento de un evento

El complemento de un evento A con respecto al espacio muestral Ω, es el evento que ocurre si A no ocurre, simbólicamente:

$$A^C = A' = \{\omega \in \Omega \,/\, \omega \notin A\}$$

Ejemplo:
Un experimento aleatorio consiste en seleccionar un alumno de una I. E. Sea el evento:
A: el alumno seleccionado es estudioso $\Rightarrow$ A^C: el alumno seleccionado no es estudioso.

Inclusión de eventos

Dados dos eventos A y B de un cierto experimento aleatorio. Se dice que el evento A está contenido en B, si siempre que ocurre A ocurre B. Simbólicamente:

$$A \subset B \iff \forall\, \omega: \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

Ejemplo:
Un experimento aleatorio consiste en seleccionar un alumno del 3.er año de educación secundaria de una determinada I. E. y observar su estatura. Sean los eventos:
A: el alumno seleccionado al azar tiene una estatura mayor a 1,40 m.
B: el alumno seleccionado tiene una estatura mayor a 1,50 m.
Entonces, es claro que el evento B está contenido en el evento A, es decir: $B \subset A$

ESPACIOS MUESTRALES FINITOS EQUIPROBABLES

Sea Ω un espacio muestral finito, esto es $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$. Se dice que este espacio es equiprobable si cada uno de los elementos del espacio muestral tiene la misma posibilidad de salir, esto es:

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n};\ i = 1; 2; ...; n$$

Luego, si A es un evento que contiene r eventos simples de Ω, esto es: $A = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_r\}$, entonces:

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

Esta manera de calcular la probabilidad del evento A, es frecuentemente enunciado de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\text{n.° de elementos del evento A}}{\text{n.° de elementos de } \Omega}$$

Ejemplo:
Halla la probabilidad de obtener un número menor o igual que 4 al lanzar un dado.

Resolución:
El espacio muestral de este experimento es: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Sea el evento A: el número obtenido es menor o igual que 4.
Entonces: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ Luego: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES DE EVENTOS

1. Si Ω es un espacio muestral, entonces: $P(\Omega) = 1$
2. Si ϕ es el evento imposible, entonces: $P(\phi) = 0$
3. Si A^C es el evento complementario de A, entonces: $P(A^C) = 1 - P(A)$
4. Si A y B son dos eventos tales que $A \subset B$, entonces: $P(A) \leq P(B)$
5. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Recuerda

Para un evento A del espacio muestral Ω, se cumple:
- $A \cup A^C = \Omega$
- $A \cap A^C = \phi$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap \phi = \phi$
- $(A^C)^C = A$

Atención

Dados dos eventos A y B tal que $A \subset B$, se cumple:
- $A \cup B = B$
- $A \cap B = A$

Nota

Si A es un evento cualquiera del espacio muestral Ω, se cumple:
$0 \leq P(A) \leq 1$

Ten en cuenta

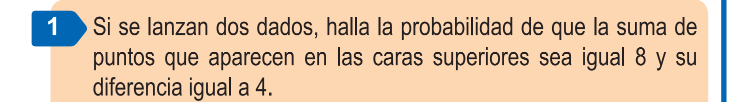
En muchos casos no es necesario determinar los elementos del espacio muestral, solo interesa saber cuántos elementos existen, para lo cual emplearemos los conocimientos del análisis combinatorio.

Observación

Si A, B y C son tres eventos cualesquiera, se cumple:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Problemas resueltos



1 Si se lanzan dos dados, halla la probabilidad de que la suma de puntos que aparecen en las caras superiores sea igual 8 y su diferencia igual a 4.

Resolución:

El espacio muestral asociado a este experimento, está conformado por el conjunto de pares ordenados en las que la primera componente es el resultado del 1.^{er} dado y la segunda componente el resultado del 2.° dado, esto es:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6) \\ (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6) \\ (3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6) \\ (4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6) \\ (5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6) \\ (6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6) \end{matrix}\right\}$$

Sea el evento:
A: la suma de los puntos que aparecen en las caras superiores es igual a 8 y su diferencia es 4.

Entonces: A = {(2; 6), (6; 2)}

Luego: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

2 En un taller trabajan 6 hombres y 4 mujeres. Según el número de ficha se han escogido al azar 7 personas. Halla la probabilidad de que entre las personas seleccionadas resulten 3 mujeres.

Resolución:

En este caso el espacio muestral estará conformado por todas las maneras que se pueden seleccionar al azar 7 personas de un grupo de 10. Es decir: $n(\Omega) = C_7^{10}$

Sea el evento A: en el grupo seleccionado hay 3 mujeres.
Podemos escoger 3 de las 4 mujeres de C_3^4 maneras; las 4 personas restantes que integrarán dicho grupo, estará conformada solamente por hombres, el cual se llevará a cabo de C_4^6 maneras.
Es decir: $n(A) = C_3^4 \times C_4^6$

Luego: $P(A) = \dfrac{C_3^4 \times C_4^6}{C_7^{10}} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

3 Se tienen 6 tarjetas idénticas, donde cada una de ellas tienen impresa una de las siguientes letras: a, t, m, r, s, e; las cuales están bien mezcladas. Si se extraen 4 tarjetas al azar y se colocan en línea, halla la probabilidad de que en las cuatro tarjetas seleccionadas se pueda leer la palabra "tres".

Resolución:

En este caso, el espacio muestral estará conformado por todos los arreglos posibles, formados con las 6 tarjetas tomadas de 4 en 4, y como se toma en cuenta la ordenación de las 4 letras, se tiene:

$n(\Omega) = A_4^6 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = 360$; donde: Ω = {tres; trea; trem; ...}

Sea el evento A: en las 4 tarjetas seleccionadas se puede leer la palabra "tres".
En este caso el evento A está conformado por un solo elemento:
A = {tres} $\Rightarrow$ n(A) = 1

Luego: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{360}$

4 Una pequeña biblioteca está formada por diez libros diferentes; además 5 libros cuestan S/.4 cada uno, 3 libros cuestan a S/.1 cada uno y 2 libros, a S/.3 cada uno. Halla la probabilidad de que dos libros escogidos al azar cuesten S/.5 ó S/.4.

Resolución:

El espacio muestral asociado a este experimento, está conformado por todas las combinaciones formadas por 10 libros tomados de 2 en 2, sin tener en cuenta la ordenación de los mismos. Entonces:

$$n(\Omega) = C_2^{10}$$

Sean los eventos:
A: los dos libros elegidos al azar cuestan S/.5.
B: los dos libros elegidos al azar cuestan S/.4.

Del enunciado, se tienen:
5 libros → S/.4 c/u; 3 libros → S/.1 c/u; 2 libros → S/.3 c/u

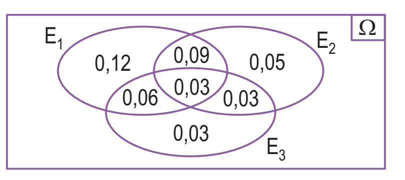
El evento A estaría formado por un libro de S/.4 y un libro de S/.1, entonces: $n(A) = C_1^5 \times C_1^3$
El evento B estaría formado por un libro de S/.1 y un libro de S/.3, entonces: $n(B) = C_1^3 \times C_1^2$
Además, los eventos A y B son disjuntos, es decir: $A \cap B = \phi$, luego, se cumple:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{C_1^5 \times C_1^3}{C_2^{10}} + \dfrac{C_1^3 \times C_1^2}{C_2^{10}} = \dfrac{7}{15}$

5 En una determinada universidad se publican 3 revistas: A, B y C. La probabilidad de que un estudiante lea A es 0,3; que lea B es 0,2; que lea C es 0,15; que lea A y B es 0,12; que lea A y C es 0,09; que lea B y C es 0,06 y finalmente que lea A, B y C es 0,03. Halla la probabilidad de que un estudiante lea al menos una de las tres revistas.

Resolución:

El espacio muestral asociado a este experimento es:
Ω = {estudiante de una determinada universidad}
Sean los eventos:
E_1: un estudiante lee la revista A.
E_2: un estudiante lee la revista B.
E_3: un estudiante lee la revista C.
La probabilidad de que los estudiantes lean por lo menos una de las 3 revistas, corresponde a calcular la probabilidad del evento $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.
Gráficamente se tiene:



Entonces:

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cup E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

$= 0,30 + 0,20 + 0,15 - 0,12 - 0,09 - 0,06 + 0,03 = 0,41$